THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY

512.32
~~512.892~~
Ev7m

MATHEMATICS
DEPARTMENT

MÉMOIRE

SUR L'INTERPRÉTATION DES SYMBOLES *DITS* IMAGINAIRES

OU

THÉORIE DES ACCEPTIONS

AVEC SES APPLICATIONS EN ALGÈBRE ET EN GÉOMÉTRIE

MÉMOIRE

SUR L'INTERPRÉTATION DES SYMBOLES *DITS* IMAGINAIRES

OU

THÉORIE DES ACCEPTIONS

AVEC SES APPLICATIONS EN ALGÈBRE ET EN GÉOMÉTRIE

Extrait principalement des travaux inédits de feu l'Abbé GEORGE

PAR

J. Joseph EVRARD
Ingénieur en chef des ponts et chaussées en retraite.

« **Il n'y a pas de quantités imaginaires.** »
(L'Abbé GEORGE).

PARIS
LIBRAIRIE POLYTECHNIQUE, BAUDRY ET Cie, EDITEURS
15, RUE DES SAINTS-PÈRES, 15
MAISON A LIÈGE, RUE DES DOMINICAINS, 7

1891
Tous droits réservés

512.3
512.9
Ev7m

PRÉFACE

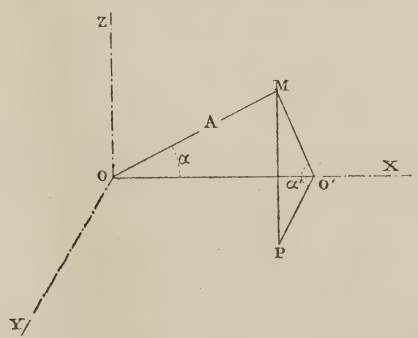
Le mémoire qui suit étant, d'après son titre même, principalement extrait des travaux de feu l'abbé George, il semblerait naturel d'exposer d'abord en quoi consistent ces travaux, de dire pourquoi ils sont demeurés inédits, et pourquoi on ne se borne pas aujourd'hui à les publier.

Mais ces explications manqueraient de clarté tant qu'on n'en connaîtra pas suffisamment la matière. On les renvoie donc à la fin du mémoire (chap. VIII).

Dans cette préface on présente, en suivant généralement l'ordre du mémoire, une analyse de la doctrine qui y est développée d'après l'auteur de la théorie des acceptions, de manière à en bien faire ressortir le caractère, la liaison et les conséquences, et en la rapprochant, quand il y a lieu, des autres conceptions qui ont le même objet.

I. (CHAP. I à IV). THÉORIE DES ACCEPTIONS

Chapitre I. (N^{os} 1 à 5). — Toute quantité *réelle* peut être



représentée par une ligne droite de longueur déterminée (OM = A), et orientée d'une manière également déterminée

à partir d'un point fixe (O), par rapport à une ligne fixe (OX) passant par ce point, avec laquelle elle fait un angle donné (MOX = α), et par rapport à un plan également fixe (YOX) passant par la ligne OX, avec lequel le plan (MOX) fait un angle donné (MO'P = α').

(Pour simplifier le langage, on qualifiera habituellement le plan fixe YOX de plan *horizontal*, sans que cela implique rien quant à sa situation absolue).

Suivant qu'on suppose les arcs ou angles (α et α') évalués en fonction du *quadrant* ou de *l'angle droit* pris pour unité, — ou en fonction du *rayon* pris pour unité, — l'expression analytique la plus générale de la représentation linéaire d'une quantité réelle est (n° 1 — *b*) : $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$,

ou (n° 5) : $A\sqrt{-1}^{\frac{2\alpha}{\pi}\sqrt{-1}^{\frac{2\alpha'}{\pi}}}$

(On fera le moins possible usage de la seconde forme qui complique inutilement l'écriture et l'énoncé).

L'expression $\left(A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ se compose (n° 3) de deux éléments : 1° le *module* (A) correspondant à la *grandeur*; 2° *l'acception* $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ correspondant à la *direction* ou à *l'orientation* de la représentation linéaire de la quantité considérée.

Pour $\alpha' = o$, l'acception se réduit à $\sqrt{-1}^{\alpha}$, et est dite acception *simple*. Elle caractérise toutes les directions comprises dans le plan *horizontal*, et elle est représentée par tous les rayons de la circonférence de rayon 1 située dans ce plan.

Pour chaque valeur donnée de α', l'acception, qui peut encore s'écrire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}$, est dite acception *réflexe*.— Elle caractérise toutes les directions comprises dans le plan *d'inclinaison* α', et elle est représentée par tous les rayons de la circonférence de rayon 1 située dans ce plan.

$(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ peuvent donc être appelés (n° 14) les *bases* de l'acception *simple* et de l'acception *réflexe*.

Cela posé, il sera démontré (n^{os} 10 et 71-74) que toute fonction de $\sqrt{-1}$ est réductible à la forme générale: $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ et peut par conséquent être interprétée comme la représentation d'un quantitée *réelle* de module A et d'acception $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$.

Il n'y a donc pas de quantités imaginaires.

La distinction des quantités d'après leur acception devra (n° 3) se substituer à celle du *réel* et de *l'imaginaire*, et, en bonne logique, le mot *imaginaire* devrait disparaître du langage scientifique ; — mais si son emploi demeure commode, il n'y a aucun inconvénient à le conserver, pourvu qu'on s'entende.

Tel est, réduit, à ses termes les plus simples, le résumé de la doctrine de l'abbé George.

Elle a pour point de départ l'établissement du symbole général d'acception $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$, donné dès le n° 1 du mémoire, et donné d'ailleurs, nous y insistons expressément, ici comme dans le texte, indépendamment de toute attribution *a priori* d'une signification géométrique au symbole $\sqrt{-1}$.

L'interprétation géométrique des symboles élémentaires d'acception $(\sqrt{-1})$ et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, c'est à dire, la *perpendicularité* et la *double perpendicularité*, n'apparaît en effet (n° 2) que comme la conséquence de celle du symbole général pour des valeurs particulières attribuées aux variables α et α'.

Peu importe d'ailleurs que l'intuition de la propriété géométrique du symbole $\sqrt{-1}$ ait été le point de départ des recherches de l'abbé George, comme de ses devanciers. On verra qu'il le reconnaît explicitement (n° 76).

En tout cas, les bases de la théorie des acceptions sont complètement posées dans les n° 1 à 3 du mémoire, et tout le reste n'est qu'une suite de déductions qui s'enchaînent naturellement, — et que notre tâche a été de rendre aussi claires et aussi rigoureuses que possible.

Avant d'en suivre les développements, il est à propos de déterminer avec précision ce qui, dans les notions qu'on vient de résumer, appartient exclusivement à l'abbé George.

En premier lieu, et sauf la dénomination même *d'acception simple* ou *réflexe*, seul néologisme que comporte sa théorie, on vérifie (n° 18) que le symbole de l'acception *simple* sous la forme $\left(\sqrt{-1}^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)$ se déduit directement de la formule d'Euler, et n'est qu'une autre manière d'en écrire le premier membre : c'est-à-dire qu'en supposant l'arc α exprimé en fonction du rayon, on a l'équation double :

$$\left(e^{\alpha\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right) = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

Si on suppose l'arc ou angle α exprimé en fonction du quadrant ou de l'angle droit pris pour unité, on devra écrire :

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha}\right) = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

D'autre part, les premiers auteurs qui se sont occupés des imaginaires (voir *l'Esssai d'Argand*, réédité par Houël —1874), après eux Cauchy, (*Exercices d'analyse et de physique mathématique*, T. IV. — *Mémoire sur les quantités géométriques*), et Bellavitis (Voir : *Théorie et application des équipollences* par M. Laisant 1887), — sont d'accord pour considérer $r(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$, — [ou : $r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ ainsi que l'écrivent Cauchy, M. Laisant, etc...] comme l'expression d'une droite de longueur r située dans le plan horizontal et inclinée de α sur l'axe des x.

M. Laisant, en particulier (*Équipollences*, n^{os} 39, 42), emploie la notation :

$$\left[ri^{\mathrm{p}} = ri^{\frac{2\alpha}{\pi}} \right] = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

comme expression de cette même droite, suivant que l'angle α est mesuré par p en prenant pour unité l'angle droit ou le quadrant, — ou qu'il est rapporté à l'arc de longueur équivalente à celle du rayon.

En un mot, le symbole de l'acception *simple* et son interprétation géométrique ne sont pas *chose nouvelle*, pas plus que *l'affirmation* de la *réalité* du binôme $(a + b\sqrt{-1})$ qui donne lieu, en posant $\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\alpha$, à la transformation :

$$a + b\sqrt{-1} = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right)$$

$$= \sqrt{a^2+b^2}.(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) = \sqrt{a^2+b^2}.\sqrt{-1}^{\left(\alpha = \text{arc. tg}\frac{b}{a}\right)}$$

d'où résulte que $(a + b\sqrt{-1})$ est une quantité *réelle* de module $A = \sqrt{a^2+b^2}$, et d'acception : $\sqrt{-1}^{\left(\alpha = \text{arc. tg}\frac{b}{a}\right)}$

Les mêmes auteurs (Français : *Essai d'Argand*, p. 72. — Laisant : *Equipollences*, n° 35) sont également d'accord pour reconnaître qu'à cause de $(\sqrt{-1}^{4k} = 1)$, si on pose $\alpha = \frac{4k}{n}$, et

qu'on donne à k les valeurs successives $(0,1,2\ldots,n-1)$, les n rayons équidistants de la circonférence de rayon 1 située dans le plan horizontal (n° 4 du mémoire) seront les représentations linéaires des n racines n^{es} de l'unité, et que ces racines sont toutes *réelles* puisque, dit Français, « *elles sont représentées par « des lignes données de grandeur et de direction* ».

Mais pour les quantités dont la représentation linéaire serait dirigée d'une manière quelconque dans l'espace, en dehors du plan horizontal, le symbole de cette représentation n'était pas trouvé, quoique depuis longtemps pressenti, notamment par Français (*Extrait des Annales de Gergonne*. T. IV, reproduit dans *l'Essai d'Argand*, p. 98) qui, dès 1813, s'exprimait dans les termes suivants :

« Pour la géométrie à deux dimensions, j'ai réduit les « droites obliques de la forme $A + B\sqrt{-1}$ à celle a_α, où a « représente la grandeur absolue de la droite, et α l'angle « qu'elle fait avec l'axe des abscisses. Dans la géométrie à trois « dimensions, je voudrais exprimer la position d'une droite « quelconque par a_{α_A}, où a exprimerait la grandeur absolue « de la droite, α l'angle qu'elle fait avec l'axe des abscisses et « A celui que le plan de l'angle α fait avec le plan des xy ; mais « toutes mes tentatives à cet égard ont été jusqu'ici infruc- « tueuses. — Je désire que quelqu'un plus habile que moi « vienne à bout de compléter cette lacune. Quoi qu'il en soit, « je suis persuadé que le vrai moyen d'étendre notre théorie « des imaginaires à la géométrie à trois dimensions réside « dans la considération des angles imaginaires ».

Non seulement pourtant la solution du problème posé par Français n'avait pas abouti depuis 80 ans, mais la recherche même de cette solution était, de fait, abandonnée, soit par indifférence, soit par une sorte de préjugé ou de prévention qui la faisait considérer comme chimérique.

Le désidératum signalé par Français est désormais obtenu, et n'est autre chose que l'expression analytique de la représentation linéaire d'une quantité d'acception réflexe, donnée par l'Abbé George sous la forme $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$. Les trois variables A, α et α', qui entrent dans cette expression sont respectivement identiques avec celles que Français désigne par *a*, α et A, et l'arc ou angle $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ est précisément (N^os^ 1, 15) l'angle prétendu *imaginaire* dont la considération devait, suivant lui, permettre d'étendre sa théorie à la Géométrie à trois dimensions.

La détermination et l'interprétation de l'expression $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ constituent donc une *véritable découverte*, absolument *personnelle* à l'auteur de la théorie des acceptions.

Chapitre II (n^os^ 6 à 14). — Comme les méthodes des *équipollences* et des *quaternions*, la méthode des *acceptions* envisage le calcul des expressions analytiques de la représentation linéaire des quantités sous deux aspects principaux. Elle les considère successivement : 1° comme éléments de *sommes* ; 2° comme éléments de *produits* algébriques.

Le second chapitre du mémoire est consacré à l'étude des *sommes*.

Nous avons pu nous dispenser de toute définition d'*addition* ou de *soustraction* des *droites* (équipollences) ou des *vecteurs* (quaternions) en prenant pour point de départ une théorie toute faite, celle de la composition *géométrique* des *droites*, dont nous avons (n° 6) emprunté textuellement l'exposé au « *Traité de mécanique* » de M. E. Collignon.

L'opération de la composition des droites se résume (n° 7) par l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = \Sigma A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

qui se réduit, pour un contour fermé, à

$$\Sigma A \sqrt{-1}^{\alpha \sqrt{-1}^{\alpha'}} = 0$$

et qui est rigoureusement algébrique, puisque son élément symbolique $\left(\sqrt{-1}^{\alpha \sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ se traduit trigonométriquement (n°8) par la formule trinôme, élémentaire et fondamentale :

$$\sqrt{-1}^{\alpha \sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha' \ldots \text{(F)}$$

A l'aide de cette formule, on obtient (n° 9) le développement de la 1e équation générale du n° 7, dont chaque membre se présente sous la même forme trinôme de termes d'acceptions respectives, $1, \sqrt{-1}, \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. — Mais les modules de même acception représentent, dans le premier membre, les projections de la résultante ; dans le second membre, la somme des projections des composantes sur les trois axes coordonnés ; et, d'après l'un des principes de la composition des droites (n° 6 — I. 6°), il y a égalité entre ces modules de part et d'autre. On peut donc écrire, débarrassées des symboles d'acception, les équations propres à déterminer la résultante d'un contour polygonal composé d'éléments rectilignes, ou encore, par exemple, car elles sont identiques, les équations de la *résultante d'un nombre quelconque de forces appliquées à un même point de l'espace.*

Cependant (n° 10), si l'on suppose qu'on ait fait passer dans le premier membre tous les termes de l'équation générale développée, elle se présente sous la forme :

$$L + M\sqrt{-1} + N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0,$$

et on aurait séparément, d'après ce qui précède :

$$L = 0, \quad M = 0, \quad N = 0.$$

Or cette conséquence serait en contradiction avec une proposition qu'on énonce habituellement en ces termes :

« On *démontre*,(les plus réservés disent : on *admet*) que toute « fonction de $\sqrt{-1}$ est réductible à la forme $(p + q\sqrt{-1})$. »

On fait remarquer que Lagrange s'est borné à établir cette proposition pour l'expression $(x + y\sqrt{-1})^{(m + n\sqrt{-1})}$, m et n étant des *constantes*, et que dans ce cas la théorie des acceptions est d'accord avec lui ; qu'elle va même plus loin, puisqu'elle montre comment construire la courbe plane représentée par l'expression considérée. Mais la démonstration de Lagrange ne s'étend pas au cas où m et n sont des *variables*, où il s'agirait, par exemple, de l'expression $(x + y\sqrt{-1})^{(x' + y'\sqrt{-1})}$. On renvoie au n° 72 pour montrer que cette expression représente une courbe à double courbure et n'est réductible qu'à la forme $\left(p + q\sqrt{-1} + r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$.

Il y a donc deux propositions distinctes à formuler, suivant qu'il s'agit de géométrie à deux ou à trois dimensions. On les rapproche de leurs analogues dans la méthode des quaternions.

L'équation (F) du n° 8 prend (n° 11), pour les directions comprises dans chacun des trois plans coordonnés, trois formes particulières (f_1),(f_2) (f_3), dont la première (n° 18) n'est qu'un autre aspect de la formule d'Euler, et dont on tire (n^{os} 12 et 13) des conséquences qui ne comportent aucune observation. Mais elles conduisent en outre (n° 14) à une figure *binôme* (F′) de l'équation (F) elle-même :

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} \sin\alpha \ldots\ldots \text{(F′)}$$

Et le rapprochement de (F') avec (f_1) du n° 11 c'est-à-dire avec :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha \ldots\ldots (f_1)$$

montre que la transition entre l'équation (f_1) des directions comprises dans le plan horizontal, et l'équation (F') des directions comprises dans le plan d'inclinaison α', s'opère en substituant la *base d'acception réflexe* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ à la *base d'acception simple* $\left(\sqrt{-1} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{0}}\right)$.

Mais si dans (f_1), d'autre part, on remplace α par $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ on a :

$$\sqrt{-1}\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) + \sqrt{-1}\sin\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) \ldots\ldots (F'')$$

et comme les deux résultats doivent être identiques, il faut examiner ce que c'est que l'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, et ce que sont ses lignes trigonométriques : c'est-à-dire qu'on est conduit à l'étude des arcs ou angles dits *imaginaires*. Cette étude et ses conséquences font l'objet du chapitre III.

Chapitre III (n^os^ 15 à 29). — L'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ n'étant autre chose (n° 15), comme on l'a d'ailleurs déjà vu (n° 1 — *b*), que ce que devient l'arc α, tracé dans le plan horizontal, lorsqu'il se transporte dans le plan d'inclinaison α' en tournant autour du diamètre de la sphère dirigé suivant l'axe des x, est aussi *réel* que α, et les lignes trigonométriques de $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ doivent (n° 16) être identiques avec celles de α comme *grandeur* ou comme *module*, et n'en différer que par l'*acception*.

Il suit de là (n° 17) que si l'on tente, par exemple, (n° 17-1°)

de remplacer α par $(\alpha\sqrt{-1})$ dans les séries de sin α et cos α, ou (n° 17-2°) de remplacer β par $(\beta\sqrt{-1})$ dans les formules de sin $(\alpha+\beta)$ et cos $(\alpha+\beta)$, on ne peut obtenir que des résultats erronés, inexplicables d'ailleurs autant qu'inexpliqués, bien que la légitimité de telles substitutions ait été dogmatiquement professée (n° 17-3°) par Navier.

Cependant (n° 18), la substitution de $(x\sqrt{-1})$ à x dans le développement en série de l'exponentielle e^x, rapprochée des séries de sin x et cos x, et en supposant que x soit un arc, et le même arc dans les deux cas, aboutit à la formule d'Euler. Mais cette formule elle-même est identique avec l'équation des directions planes (f_1 du n° 11) puisque celle-ci s'en déduit naturellement : cette dernière ayant été dûment démontrée, la formule d'Euler se trouve ainsi, au besoin, confirmée par la théorie des acceptions.

La relation $\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$ conduit (n° 19) à la définition du logarithme de l'acception et à sa représentation géométrique. En remplaçant d'ailleurs α par sa forme plus générale $(\alpha + 4k)$, on rencontre la notion des logarithmes *multiples*, d'abord pour les acceptions, puis pour les nombres réels N, dont le logarithme comprend en premier lieu (lN) donné par les tables, en second lieu un nombre *pair* ou *impair* de demi circonférences imaginaires suivant que N est positif ou négatif, ce qui s'accorde avec cette proposition de l'algèbre que les nombres négatifs n'ont pas de logarithme *réel*, puisqu'un nombre *impair* de demi circonférences ne peut jamais être nul.

Cependant la relation $\left(\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}\right)$ ne s'applique qu'à l'acception *simple*. Pour l'approprier (n° 20) à l'acception *réflexe*, il n'y a (n° 14) qu'à y remplacer la base $(\sqrt{-1})$ de l'acception

simple par la base $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception réflexe.

On arrive ainsi, en supposant $\alpha = \alpha' = 1$, à cette équivalence du symbole élémentaire de l'acception réflexe :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} \quad \text{.... (E).}$$

Or, elle est en désaccord (n° 21) avec celle qui a cours dans l'enseignement et qui figure dans les traités d'analyse :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \text{.... (E')}$$

d'après laquelle $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ serait une *quantité réelle* égale à $\left(e^{-\frac{\pi}{2}} = 0.208\right)$.

On fait ressortir toutes les contradictions qui condamnent l'étrange équivalence (E'), tandis que (n° 21-3°) l'équivalence (E) y échappe.

De là résultent (n° 22) les conséquences suivantes :

1° Le logarithme de l'acception *réflexe* serait susceptible de deux expressions ; mais celle qu'on obtient en opérant sur la *base* d'acception est seule admissible analytiquement, à l'exclusion de celle qu'on obtiendrait en opérant sur *l'arc*, puisque le second procédé est en défaut dans le cas de $\alpha' = 1$, et donne $(\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1)$ là où on doit avoir $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$;

2° Cependant on s'explique aisément que les 2 expressions $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ et $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{1+\alpha'}\right)$, qui pour $\alpha' = 1$, se réduisent respectivement à $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ et $\left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right)$, n'aient pour représentation géométrique qu'un seul et même arc ;

3° Dans la recherche du logarithme de l'acception réflexe

(1° ci-dessus), l'insuccès du second procédé, et la forme sous laquelle il se manifeste $\left[(\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1)\right.$ au lieu de $\left.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right]$ étaient à prévoir, attendu que le symbole élémentaire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ de l'acception réflexe ne saurait être engendré par des opérations sur des facteurs d'acception simple : si donc de telles opérations doivent nécessairement aboutir à l'introduction du symbole $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ dans les résultats, ce ne peut être qu'au prix d'une *dérogation aux règles ordinaires du calcul algébrique*.

Suit (n° 23) l'étude de cette *dérogation*. Elle se résume dans une règle pratique de calcul, qui précise dans quelle circonstance unique on devra écrire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, lorsque la multiplication algébrique donnerait $(\sqrt{-1}.\ \sqrt{-1} = -1)$, et qui peut se formuler ainsi :

$$\left[\mathrm{L} + (\mathrm{M} = \mathrm{N} + \mathrm{P}\sqrt{-1})\sqrt{-1}\right] = \left[\left(\mathrm{L} + \mathrm{N}\sqrt{-1} + \mathrm{P}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\right.$$

$$\left.\textit{au lieu de } (\mathrm{L} + \mathrm{N}\sqrt{-1} - \mathrm{P})\right]$$

Plus encore que le symbole général de l'acception réflexe, que d'autres, tels que Français, avaient poursuivi, cette règle constitue une *découverte* absolument *neuve* et *personnelle* à l'auteur de la théorie des acceptions, dont elle devrait à bon droit rappeler le nom, si, comme nous le pensons, on reconnaît qu'il y a lieu de l'admettre en analyse à titre de *vérité nouvelle*.

La règle du n° 23 est complétée (n° 24) par une remarque relative à l'interprétation des échelonnages multiples de $\sqrt{-1}$, cas particulier des expressions de forme

$$\sqrt{-1}^{\ \alpha\sqrt{-1}^{\ \alpha'\sqrt{-1}^{\ \alpha''\sqrt{-1}^{\ \alpha'''\ldots.}}}}$$

dont la génération, l'interprétation et la réduction seront étudiées au n° 64. — La remarque du n° 24 peut se formuler ainsi :

$$\{L + [M = N + (P = Q + S\sqrt{-1})\sqrt{-1}]\sqrt{-1}\} =$$
$$= \{L + N\sqrt{-1} + Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + S(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = 1)$$
$$= (L + S) + N\sqrt{-1} + Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\}$$

La règle du n° 23 est (n° 25) l'*unique* dérogation aux règles ordinaires du calcul algébrique que comporte la théorie des acceptions. — On donne immédiatement quelques exemples de son application.

La même règle du n° 23 conduit (n° 26) à la rectification de la formule donnée dans tous les traités d'Analyse comme « *expression trigonométrique de l'exponentielle* ».

La théorie des acceptions confirme, au contraire, (n° 27) l'exactitude des expressions de *sin* α et *cos* α déduites, suivant l'usage, de la formule d'Euler, et rend d'ailleurs plus évidente l'interprétation concrète de ces formules en y remplaçant l'expression logarithmique de l'acception par son expression exponentielle.

Mais on montre (n° 28) que Cauchy avait fait subir à ces formules des transformations erronées, qui doivent être rectifiées conformément à la règle du n° 23.

On donne enfin (n° 29) l'interprétation d'expressions diverses où $\sqrt{-1}$ figure en exposant.

Le chapitre III n'a été, pour ainsi dire, qu'une longue digression, qui a eu pour point de départ l'étude des *arcs* dits *imaginaires*, mais dont l'importance est extrême, puisqu'elle a conduit, en premier lieu, à rectifier de nombreuses erreurs (n^{os} 17, 21, 25, 26, 28) accréditées de longue date et qui étaient basées sur l'appréciation inexacte ou plutôt sur l'ignorance de

la nature de ces arcs; — en second lieu, à établir (n° 23) une règle pratique de calcul constituant une dérogation à la règle ordinaire de la multiplication algébrique, mais à la fois *nécessaire* et *suffisante* pour assurer l'exactitude des acceptions.

On va, dans le chapitre IV, reprendre l'étude du calcul des expressions analytiques de la représentation linéaire des quantités, en envisageant, cette fois, ces expressions comme éléments de produits algébriques.

Chapitre IV (n° 30 à 44). — Etant d'abord reconnu (n° 30) que le produit des expressions analytiques de deux ou plusieurs droites est, aussi bien que leur somme, l'expression analytique d'une droite, dont le *module* est égal au *produit* des *modules*, et l'*acception* égale au produit des *acceptions* des facteurs, et l'établissement de la valeur linéaire du produit des modules ne présentant aucune particularité, on fait, dans la suite de ce chapitre, abstraction des *modules* pour ne s'occuper que des *acceptions*. — On examine les divers cas qui peuvent se présenter dans l'ordre de leur complication.

Le plus simple (n° 31) est celui où tous les facteurs sont de même réflexité. Le produit, également de même réflexité, est un produit algébrique *ordinaire*, en ce sens qu'il est invariable, quels que soient le nombre et l'ordre des facteurs, ce qui n'aura pas lieu, comme on le verra (n° 37), pour les facteurs de réflexité différente.

Le second cas (n° 32) est celui de deux facteurs orthogonaux, dont l'un d'acception simple. Son étude conduit à une nouvelle expression analytique d'une droite, en fonction de la *longitude* (a) et de la *latitude* (a') de son extrémité, et par conséquent à une *seconde forme* de l'acception réflexe : $\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)$

Il en résulte (n° 33) la constatation de l'équivalence : $\left(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, et (n° 34) une règle de calcul impor-

tante pour la multiplication, par $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$, d'un binôme de forme $(M+N\sqrt{-1})$, règle qui se formule ainsi :

$$(M+N\sqrt{-1})\cdot\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{M^2+N^2}\cdot\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

Du rapprochement (n° 35) des deux formes de l'acception réflexe, on déduit : 1° des formules de transition de l'une à l'autre forme ; — 2° l'équation analytique du triangle sphérique rectangle ; — 3° la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

Le cas (n° 36) de deux facteurs dont l'un est toujours d'acception simple, mais l'autre situé dans un plan oblique au lieu d'être dans le plan perpendiculaire au plan horizontal, ne présente pas plus de difficultés que celui de 2 facteurs orthogonaux (n° 32). Les formules de transition entre les deux formes de l'acception (N° 35 — 1°) y trouvent leur emploi.

On arrive (n° 37) au cas le plus général de deux facteurs d'acception réflexe et de réflexité différente. Comme leur produit ne peut dépendre que de l'inclinaison *relative* $(\beta' - \alpha')$ de leurs plans respectifs, on ramène ce cas au précédent en faisant coïncider l'un de ces plans avec le plan horizontal. Mais, comme il y a deux plans, il y a *deux produits*, de forme $\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}}$ et $\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}}$. — La solution graphique est d'accord avec le calcul pour montrer que $\rho_2 = \rho_1$, mais que ρ'_2 diffère de ρ'_1. Les résultats du calcul sont d'ailleurs conformes à ceux que donnerait l'emploi direct de la trigonométrie sphérique. — Les cas examinés aux n^{os} 32 et 36 comportent naturellement aussi une double solution.

Supposant (n° 38) l'introduction d'un 3^e facteur, on constate

d'abord la nécessité de préparer son expression de manière à maintenir l'inclinaison relative de l'arc qui le caractérise par rapport à l'arc qui caractérise le facteur précédent : et la figure suffit pour faire voir que les arcs qui caractérisent les nouveaux produits diffèrent comme grandeur aussi bien que comme déclivité.

Envisageant enfin (n° 39) le cas d'un nombre quelconque de facteurs introduits dans l'ordre où ils sont énoncés, puisque cet ordre influe sur le résultat, on reconnaît qu'à chacun des produits successifs représentés par un rayon de la sphère, correspond un sommet d'un polygone sphérique dont les côtés seraient les arcs qui caractérisent chaque facteur, et dont les angles saillants ou rentrants seraient les inclinaisons mutuelles de ces arcs ; que *l'arc qui caractérise le produit de rang K peut être regardé comme la résultante de la composition, à la surface de la sphère, des* $(K + 1)$ *arcs qui caractérisent les* $(K + 1)$ *premiers facteurs* : composition qui présente avec celle des droites dans le plan une évidente analogie, mais aussi une différence essentielle, en ce que la *résultante varie avec l'ordre des composantes*. C'est ce que la Méthode des Quaternions exprime en ces termes : « *L'addition sphérique ou la multiplication des* « *vecteurs non coplanaires n'est pas commutative.* »

Il suit de là (n° 40) que la relation établie sous forme d'équation entre l'expression analytique d'un produit de facteurs de réflexité différente, et l'indication de la multiplication des expressions analytiques de ces mêmes facteurs, n'est pas une équation algébrique *ordinaire*, et ne saurait être traitée *sans réserve* comme telle. On le vérifie sur les relations établies aux n^{os} 30 et 32, et en essayant de traiter sans préparation l'équation initiale du n° 37. — La *nécessité* du procédé général du n° 37 est ainsi démontrée *analytiquement*.

On ne doit donc (n° 41) considérer que comme des équations *symboliques* les relations définies au n° 40, et il convient d'en spécifier le caractère par un signe particulier: [*crochets*]. — Sous cette réserve, on peut en faire usage dans le calcul, et le mot *somme symbolique* peut s'appliquer à la *résultante* d'une composition d'arcs.

C'est dans ce sens (n° 42) que doit être entendu le mot *somme* pour résoudre un paradoxe analytique qui, autrement, n'est susceptible d'aucune interprétation rationnelle.

On examine (n° 43) le cas où les facteurs de réflexité différente seraient exprimés sous la 2e forme du n° 32, c'est-à-dire en fonction de la *latitude* et de la *longitude*, et il résulte de cet examen que pour combiner ces facteurs comme éléments de produits, il faut préalablement les ramener à la première forme de l'acception, c'est-à-dire les exprimer au moyen des inclinaisons diédrales.

On constate enfin (n° 44) que la théorie des acceptions prend fin avec le chapitre IV. — On fait remarquer toutefois que les n^{os} 71 à 74, rejetés à la fin du chapitre VII, se rattachent en réalité à la théorie et en forment le complément.

Avant de passer aux applications (ch. V, VI, VII), il est à propos de s'arrêter un instant sur le caractère essentiel de la méthode des acceptions.

Elle est exclusivement *algébrique*, dans le sens *propre* du mot, c'est-à-dire qu'elle ne comporte que l'emploi de l'algèbre ordinaire, sauf la *dérogation* unique spécifiée par la règle du n° 23, et les *réserves* du n° 40.

M. Laisant a dit, dans la préface de la méthode des *Quaternions*:

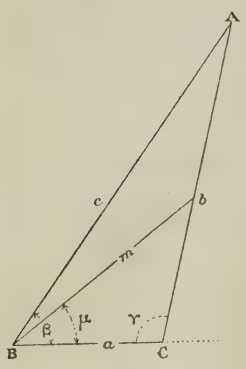
« ... Le calcul des quantités *positives* et *négatives*, c'est le « calcul des faits géométriques *sur une droite*...

« Le calcul des *équipollences*, c'est-à-dire le calcul des *quan-* « *tités imaginaires*, c'est le calcul des faits géométriques *dans* « *un plan*...

« ... Le calcul des *quaternions*, c'est l'algèbre des faits géo- « métriques *dans l'espace*... »

Mais l'algèbre des équipollences et des quaternions est tout à fait *spéciale*, on peut même dire *artificielle*.

Ainsi, dans la méthode des équipollences, on définit le triangle dont les trois côtés sont a, b, c, par $c = a + b$, et la médiane relative au côté b par $m = \frac{a+c}{2}$, relations qui ne *sont pas des équations*. Il faut ensuite établir d'autres relations pour les angles.

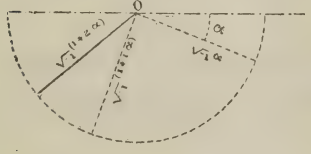


La méthode des acceptions aura, dans ce cas, des équations véritables :

$$c\sqrt{-1}^{\beta} = a + b\sqrt{-1}^{2-\gamma},$$
$$m\sqrt{-1}^{\mu} = a + \frac{b}{2}\sqrt{-1}^{2-\gamma}$$

contenant en évidence tous les éléments de la figure, et suffisantes pour déduire, dans tous les cas, les inconnues des données.

Dans la méthode des quaternions, on arrive, à la suite de considérations diverses, à conclure (Laisant, n° 28, p. 39), que « le *produit* de *deux vecteurs rectangulaires* est un *vecteur per-* « *pendiculaire à leur plan.* » — Ce n'est certainement pas l'énoncé d'une relation *algébrique*, puisque, dans la méthode des acceptions, on a, par exemple :



$$\sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{1+\alpha} = \sqrt{-1}^{(1+2\alpha)}$$

Ces remarques n'impliquent, bien entendu, aucune critique des méthodes des équipollences et des quaternions envisagées en elles-mêmes ; plusieurs fois au contraire (n^os^ 10, 39), nous avons constaté leur accord avec celle des acceptions. — Encore moins s'agit-il d'un jugement sur les ressources que peut offrir leur emploi quand on se les est rendues familières, jugement que nous ne serions pas en mesure de formuler. — Nous voulons seulement faire ressortir *le fait* que ces méthodes, aussi bien que celle des *clefs algébriques* de Cauchy dont, d'après lui-même, la théorie des *quaternions* ne serait qu'*un cas spécial* (Comptes-rendus, 10 janvier 1853, p. 70 et suivantes) ne sont pas *algébriques* à proprement parler, — tandis que la méthode des acceptions résume sous une forme unique et exclusivement *algébrique* les trois espèces de calcul distinguées par M. Laisant.

II. (CHAPITRES V A VII). APPLICATIONS.

Chap. V (n^os^ 45 à 51). — Le chap. V traite des applications algébriques de la théorie des acceptions. — On explique (n° 45) pourquoi on se borne à considérer l'équation binôme et le calcul des Radicaux.

Chapitre VI (n^os^ 52 à 61). — Le chapitre VI est relatif à l'interprétation et à la représentation des résultats imaginaires en géométrie analytique.

Pour les questions traitées par la méthode de Viète, dont la mise en équation ne comporte pas de règles générales, on ne peut raisonner que sur des exemples. — On se contente d'en donner un (n° 52).

Mais pour les questions traitées par la méthode de Descartes, on peut, par le motif contraire, généraliser l'interprétation des résultats imaginaires.

On examine d'abord (n° 53-57) le cas des équations à *deux variables*. — Le principe de la solution est posé dans le n° 53, et il repose uniquement sur la règle du n° 23.

On l'applique, comme exemple (n° 54), aux formes les plus simples de l'équation du 2e degré : on montre (n° 55) comment il s'étend au cas des coordonnées obliques, et (n° 56) à celui de la forme la plus générale de l'équation du 2e degré.

On fait voir enfin (n° 57) comment le même principe conduit à la résolution de divers paradoxes analytiques analogues à celui du n° 42, et qui, autrement, ne constituent que des propositions absolument dépourvues de sens.

On examine ensuite (nos 58-61) le cas des équations à *trois variables*. — Le principe de la solution (n° 58) repose toujours sur la règle du n° 23. — Les nos 59 à 61 correspondent aux nos 54 à 56 du cas de deux variables.

Chapitre VII (nos 62 à 74). — Le Chapitre VII traite de la mise en équation et de la résolution des questions de géométrie analytique à l'aide de la méthode des acceptions.

§ 1. — *Procédés généraux*. — On montre en premier lieu (n° 62) comment les équations analytiques peuvent conduire directement à la mise en équation des questions de géométrie analytique, par application des principes de la composition des droites et de la composition des arcs.

On montre en second lieu (n° 63) comment les équations analytiques se prêtent à la représentation des *lieux géométriques* en coordonnées polaires.

On examine successivement le cas général des *surfaces* (n° 64), celui des *courbes planes* (n° 65), et plus particulièrement (n° 66) celui des *plans*.

On fait ressortir (n° 67) la concordance de la notion de l'*ac-*

ception avec celles des « *longueurs dirigées* » et du « *Procédé directif* » de M. Vallès. On renvoie à son ouvrage pour vérifier combien l'emploi des symboles d'acception simplifie les solutions.

§ 2. — *Questions diverses.* — On donne toutefois (nos 68-70) quelques exemples de questions que M. Vallès n'a pas traitées.

§ 3. — *Questions se rattachant à la théorie.* — Ce sont (nos 71-74) les questions annoncées au n° 44, et qui complètent la démonstration ou plutôt la vérification (n° 3) de la proposition que : « *Toute fonction de* $\sqrt{-1}$ *est réductible à la forme*

$$\left(\mathrm{R}\,\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = \mathrm{p} + \mathrm{q}\,\sqrt{-1} + \mathrm{r}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$$

Chapitre VIII (nos 75 à 89). — Le chapitre VIII contient, comme on l'a annoncé dans le préambule de cette préface, l'historique et l'analyse des travaux de feu l'abbé George.

MÉMOIRE

SUR L'INTERPRÉTATION DES SYMBOLES *DITS* IMAGINAIRES

OU

THÉORIE DES ACCEPTIONS

AVEC SES APPLICATIONS EN ALGÈBRE ET EN GÉOMÉTRIE

CHAPITRE PREMIER

Représentation linéaire des quantités et expression analytique de cette représentation, composée d'un double élément : 1° le Module ; 2° l'Acception. — Conséquences.

---

1. — Représentation linéaire des quantités : (*a*) dans le plan ; (*b*) dans l'espace, et expressions analytiques correspondantes. — Formule générale (D) de l'expression d'une direction en fonction du symbole $\sqrt{-1}$. — La démonstration ne préjuge rien sur la propriété géométrique de ce symbole.
2. — Discussion de la formule générale (D) de l'expression d'une direction. — Propriétés géométriques des symboles $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.
3. — Double élément de l'expression analytique d'une quantité : 1° *Module* ; 2° *Acception* (ou coefficient de direction). — Acception *simple* ; acception *réflexe*. — La distinction des quantités d'après leur *acception* devra se substituer à celle du *réel* et de l'*imaginaire*. Indifférence d'une réforme du langage scientifique.
4. — Interprétation *algébrique* des symboles d'*acception*. — *Racines* de l'*unité*.
5. — Comparaison des formules où les arcs sont exprimés en prenant pour unité : 1° le *rayon* ; 2° le *quadrant*.

1. — Représentation linéaire des quantités. — Une quantité *positive*, exprimée *arithmétiquement* par un nombre, entier ou fractionnaire d'unités de même espèce, peut toujours être représentée *graphiquement* par une longueur OA déterminée d'après une échelle convenue, et portée à partir d'un point O sur un droite indéfinie Ox.

OA peut représenter des *lignes*, des *surfaces*, des *volumes*, des *poids*, des *forces*, des *vitesses*, etc.

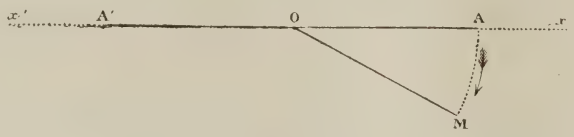


Fig. 1.

Si, d'après la nature de la question, la même quantité doit être prise *négativement*, il est admis que sa représentation graphique devra être portée en sens contraire à partir du point O, en OA′ vers x', et que OA et OA′ auront respectivement pour expression analytique, en appelant A le nombre d'unités considéré :

$$OA=+A, \qquad OA'=-A$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$OA=A\times(+1), \qquad OA'=A\times(-1)$$

c'est-à-dire que le coefficient $(+1)$ caractérise la *direction positive*, et que le coefficient (-1) caractérise la *direction négative*.

Mais, autour du point O, il y a une infinité de directions, telles que OM, qui ne sont ni *positives* ni *négatives* ; et la nature de la question (qu'il s'agisse de *forces* par exemple, ou de *chemins* parcourus, peut exiger qu'on attribue l'une quelconque d'entre elles à la quantité qu'on se propose de représenter. Comment caractériser analytiquement ces directions ?

a. Expression analytique des directions comprises dans un plan unique. — Considérons d'abord celles qui, avec la ligne xOx' sont comprises dans un plan unique, supposé horizontal pour fixer les idées et pour abréger le discours.

Remarquons qu'à cause de :

$$-1=(-1)^1$$

et de :

$$+1=\frac{(-1)^1}{(-1)^1}=(-1)^{1-1}=(-1)^0$$

les expressions analytiques des deux directions OA et OA′ peuvent également s'écrire :

$$OA = A \times (-1)^0, \qquad OA' = A \times (-1)^1$$

Le rapprochement, sous cette forme, des coefficients de A fait ressortir entre $(+1)$ et (-1) un lien de continuité qui n'apparaissait pas d'abord.

$(-1)^0$ et $(-1)^1$ sont en effet les deux valeurs correspondant à $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$ de la fonction exponentielle $(-1)^\varphi$.

Si l'on suppose que l'exposant φ aille en croissant par degrés continus de 0 à 1, c'est-à-dire qu'il prenne les valeurs successives de l'arc $AM = \varphi$ exprimé en fonction de la *demi-circonférence* AMA″A′

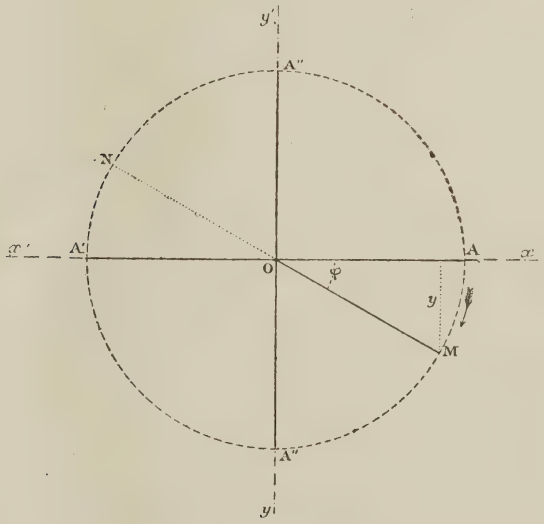


Fig. 2.

prise pour unité, — arc qui sert de mesure à l'angle MOx, — et si l'on suppose qu'en même temps le rayon OA tourne autour du centre O *dans le sens des aiguilles d'une montre* (*), de manière à

(*) Nota. — Il résulte de cette hypothèse sur le *sens* de la *rotation* dans le plan horizontal autour du centre O, que, *contrairement* à l'*usage adopté* dans la *géométrie à deux dimensions*, l'*y positif* de l'extrémité du rayon mobile *sera figuré au*

occuper successivement toutes les positions intermédiaires entre OA et OA′, sa position OM pour $MOx=\varphi$ correspondra évidemment à la valeur $(-1)^{\varphi}$ de la fonction exponentielle.

La direction OM sera donc caractérisée par $(-1)^{\varphi}$ aussi bien que OA par $(-1)^{0}$ et OA′ par $(-1)^{1}$, c'est-à-dire qu'on pourra écrire pour l'expression analytique de la quantité A sous la direction OM:

$$OM=A(-1)^{\varphi}.$$

b. Expression analytique d'une direction quelconque autour de l'origine. — Sortant maintenant du plan horizontal, supposons que le rayon OM tourne autour de Ox, l'angle $MOx=\varphi$ demeurant constant, de manière à décrire un cône à base circulaire de rayon

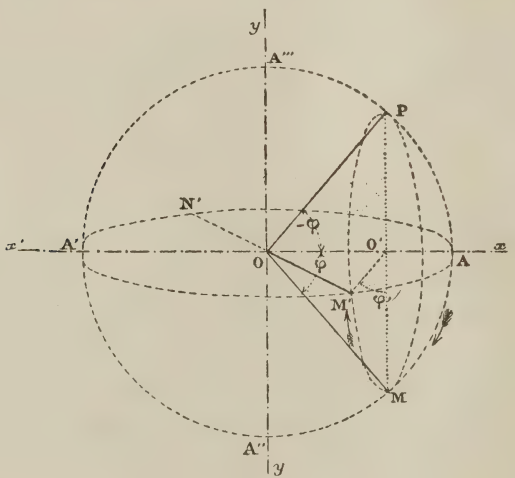


Fig. 3.

O′M, et cherchons l'expression analytique d'une génératrice OM′ de ce cône, telle que l'angle dièdre M′O′M compris entre le plan M′Ox

dessous de l'axe des x. Notre motif est d'assigner immédiatement à cette coordonnée, *en avant* du plan des xz, la situation qui lui appartiendra nécessairement lorsque nous supposerons tout à l'heure [n° 1—*b*] que le rayon mobile s'élève *au-dessus* du *plan horizontal* en tournant *autour* de l'axe des x.— Toutes les figures, dans le cours de notre travail, seront établies d'après cette considération.

et le plan horizontal, ou que l'arc MM′ compté à partir de M sur la circonférence de rayon O′M, soit égal à φ', le nombre variable φ' ayant avec l'*unité* le même rapport que l'arc MM′ avec la *demi-circonférence*.

Si nous considérons d'abord, dans le plan horizontal le rayon OP symétrique de OM, c'est à dire tel que l'angle $x\mathrm{OP} = x\mathrm{OM} = \varphi$, l'arc AMA″A′A‴P qui définit le rayon OP aura pour valeur $(2-\varphi)$.

On aura donc :

$$\mathrm{OP}=\mathrm{A}(-1)^{2-\varphi}=\mathrm{A}(-1)^{2}\times(-1)^{-\varphi}=\mathrm{A}\times(+1)\times(-1)^{-\varphi}=\mathrm{A}(-1)^{-\varphi}.$$

Rapprochant les deux expressions de OM et de OP, on a :

$$\mathrm{OM}=\mathrm{A}(-1)^{\varphi}, \qquad \mathrm{OP}=\mathrm{A}(-1)^{-\varphi}.$$

Mais, à cause de $\varphi=\varphi\times(+1)=\varphi(-1)^{0}$, et $(-\varphi)=\varphi(-1)=\varphi(-1)^{1}$, on peut encore écrire :

$$\mathrm{OM}=\mathrm{A}(-1)^{\varphi(-1)^{0}}, \qquad \mathrm{OP}=\mathrm{A}(-1)^{\varphi(-1)^{1}}$$

Sous cet aspect, les deux coefficients de A ne sont autre chose que les deux valeurs correspondant à $\varphi'=0$, et $\varphi'=1$ de la double exponentielle $(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}$.

Donc enfin on peut écrire pour l'expression analytique de la génératrice OM′ :

$$\mathrm{OM}'=\mathrm{A}(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}.$$

La double exponentielle $(-1)^{\varphi(-1)^{\varphi'}}$ est donc la caractéristique d'une direction quelconque autour de l'origine, faisant un angle φ avec l'axe des x, et située dans un plan passant par cet axe, et incliné de φ' sur le plan horizontal.

Changement d'unité d'angle. — Cependant φ et φ' y sont exprimés en fonction de la *demi-circonférence,* ce qui n'est ni usuel ni commode : il est beaucoup plus naturel de prendre pour unité le *quadrant* correspondant à l'*angle droit.*

Désignant donc par α et α' des nombres variables ayant avec l'unité le même rapport que les arcs AM et MM′ avec le quadrant, ou que les angles MOx et M′OM avec l'angle droit, on pourra d'abord écrire :

$$OM' = A(-1)^{\frac{\alpha}{2}(-1)^{\frac{\alpha'}{2}}}$$

puisqu'on obtiendrait le même résultat, par exemple, pour ($\varphi = \varphi' = 1$) et pour ($\alpha = \alpha' = 2$). — Et afin d'éviter l'aspect fractionnaire des exposants, ayant égard à l'équivalence algébrique :

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$$

on écrira définitivement :

$$OM' = A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \qquad (D)$$

C'est sous cette dernière forme que nous présentons et que nous allons étudier l'*expression générale d'une direction quelconque dans l'espace*.

Il résulte cependant de la manière dont nous y avons introduit le symbole ($\sqrt{-1}$) que nous n'avons absolument rien préjugé sur la propriété géométrique de ce symbole, — propriété qui ressortira tout à l'heure [n° 2] des développements dans lesquels nous allons entrer, mais comme simple *conséquence*, et nullement comme *hypothèse* à priori.

Notre démonstration repose en effet *uniquement*, — nous y insistons d'une manière expresse, — sur le *fait* que les deux coefficients (+1) et (—1) caractérisent la représentation linéaire des quantités *positive* et *négative*, et sur la *remarque* que ces deux coefficients sont les valeurs particulières, correspondant à $\varphi = 0$ et $\varphi = 1$, d'une même exponentielle $(-1)^{\varphi}$.

2. — Discussion de l'exponentielle (D). — Pour étudier toutes les variations de l'expression $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, nous remarquerons qu'elle peut se mettre sous la forme : $\left(A\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}$.

1° Plan horizontal. — Si l'on suppose d'abord $\alpha'=0$, elle se réduit à $A\sqrt{-1}^{\alpha}$ et donne toutes les directions comprises dans le plan horizontal.

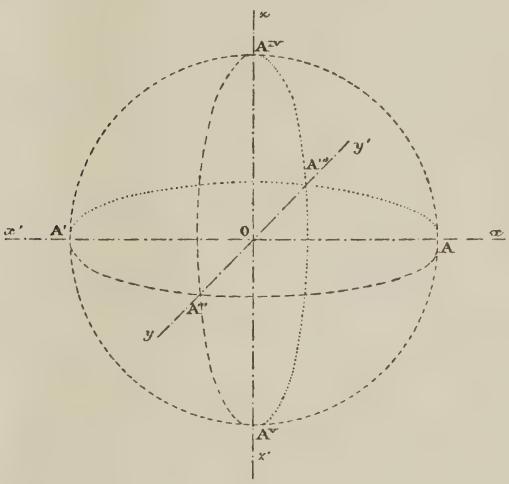


Fig. 4.

Faisant alternativement $\alpha=0, 1, 2, 3$, on a :

$$OA = A\sqrt{-1}^{0} = +A$$
$$OA'' = A\sqrt{-1}^{1} = +A\sqrt{-1}$$
$$OA' = A\sqrt{-1}^{2} = -A$$
$$OA''' = A\sqrt{-1}^{3} = -A\sqrt{-1}$$

Ainsi, tandis que le coefficient ± 1 caractérise les directions OA et OA', c'est-à-dire l'axe des x, le coefficient $\pm\sqrt{-1}$ caractérise les directions OA'' et OA''' *perpendiculaires* à l'axe des x, c'est-à-dire l'axe des y.

Pour $\alpha=4$, on retombe sur $OA=+A$. — Et, en général, on re-

tomberait sur les mêmes directions pour toutes les valeurs de α supérieures au nombre 4 qui correspond à la circonférence entière ou à quatre angles droits : car, en désignant par k un nombre entier quelconque, on a identiquement :

$$\sqrt{-1}^{(4k+\alpha)} = \sqrt{-1}^{4k} \times \sqrt{-1}^{\alpha} = (+1)\sqrt{-1}^{\alpha} = \sqrt{-1}^{\alpha}$$

2° *Plan d'inclinaison* α' — Pour α' différent de zéro, mais constant, et en faisant varier α de 0 à 4, la caractéristique donne toutes les directions comprises dans le plan passant par l'axe des x, et incliné de α' sur le plan horizontal.

Considérons, en particulier [figure 3], deux rayons directement opposés et formant le prolongement l'un de l'autre, tels que OM′ et ON′ situés dans le plan d'inclinaison α'.

L'expression analytique de OM′ étant $A\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}$, celle de ON′ sera $A\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{(2+\alpha)}$ ou $A\sqrt{-1}^{(2+\alpha)\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, et on aura algébriquement :

$$A\sqrt{-1}^{(2+\alpha)\sqrt{-1}^{\alpha'}} = A\sqrt{-1}^{2\sqrt{-1}^{\alpha'}} \times \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Mais les rayons OM′ et OM respectivement exprimés par $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ et $A\sqrt{-1}^{\alpha}$ se confondent ensemble avec OA′ pour $\alpha = 2$; on a donc :

$$A\sqrt{-1}^{2\sqrt{-1}^{\alpha'}} = A\sqrt{-1}^{2} = A \times (-1) = -A$$

L'expression analytique de ON′ équivaut donc à $\left(-A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$

Ainsi deux rayons formant le prolongement l'un de l'autre ont pour expresssion respective $\left(\pm A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$, c'est-à-dire qu'ils sont relativement *positif* et *négatif* l'un par rapport à l'autre.

3° Plan des xz. — Pour $\alpha'=1$, la caractéristique devient $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha}$ et donne toutes les directions comprises dans le plan vertical des xz.

On a notamment, en supposant le rayon égal à l'unité, et d'après la figure 4 :

pour $\alpha=1\ldots\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=0A^{IV}$, c'est-à-dire la partie supérieure de l'axe des z.

$$\alpha=2\ldots\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{2}=0A'=-1$$

$$\alpha=3\ldots\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{3}=\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{2}\times\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=(-1)\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=$$

$$=-\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)=0A^{V},$$

c est-à-dire la partie inférieure de l'axe des z

$$\alpha=4\ldots\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{4}=0A=+1.$$

Ainsi la caractéristique de l'axe des z est $\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$

On voit en même temps que $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ est, comme $(\sqrt{-1})$, une racine *carrée* de l'unité *négative*, et une racine *quatrième* de l'unité *positive*. — Cette propriété de représenter une racine de l'unité, constatée seulement ici pour le coefficient $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, sera généralisée tout à l'heure [n° 4].

4° Plan des yz. — Enfin, pour $\alpha=1$, la caractéristique devient $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ et, en y faisant varier α' de 0 à 4, elle donne toutes les directions comprises dans le plan vertical des yz, perpendiculaire à l'axe des x : directions qui sont en même temps les *traces*, sur le plan des yz, de tous les plans d'inclinaison α', ou les lignes de plus grande pente de ces plans.

On reviendra sur cette remarque [n° 14].

3. — Double élément de l'expression analytique d'une quantité. — De ce qui précède résultent les conséquences suivantes :

L'expression analytique d'une quantité se compose de deux éléments distincts :

1° Un nombre absolu (A), entier ou fractionnaire, marquant le rapport de la quantité considérée avec l'unité qui lui sert de mesure ;

2° Un coefficient dont la forme générale est $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ qui caractérise la direction de la représentation linéaire de cette quantité. — Ce symbole donne toutes les directions autour de l'origine, en y faisant varier convenablement α et α', et il prend en particulier les valeurs :

(± 1) pour l'axe des x.

$(\pm\sqrt{-1})$ pour l'axe des y, ou pour la *perpendicularité simple*.

$\left(\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ pour l'axe des z, ou pour la *perpendicularité double*.

Toutes les quantités comprises dans la forme générale $\left(A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ étant également susceptibles de représentation linéaire, sont donc aussi *visibles*, aussi *tangibles*, par conséquent aussi *réelles*, et aussi peu *imaginaires* les unes que les autres.

Mais on verra plus loin (n^{os} 10, 71 à 74) que toute fonction de $\sqrt{-1}$, si compliquée qu'elle soit, est réductible à cette forme.

Sous le bénéfice de cette vérification *a posteriori*, on peut formuler dès à présent la proposition qui est le dernier mot de la doctrine de l'abbé George :

Il n'y a pas de quantités imaginaires.

Module. — On donnera, dans la suite de ce travail, le nom de *module*, correspondant à l'idée de *grandeur*, à l'élément (A) de l'expression analytique d'une quantité.

Acception. — On donnera le nom d'*acception* à l'élément $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ qui correspond à l'idée de *direction* (ou de *sens*) de la représentation linéaire de cette quantité.

Ces deux dénominations, dont la seconde d'ailleurs est seule nouvelle, se justifient suffisamment par leur définition grammaticale ;

« *Module* : ce qui sert à mesurer (Dictionn. Abrégé de Littré, par Beaujan).

« *Acception* : *sens* qu'on donne à un mot (Dictionn. Abrégé de Littré, par Beaujan).

Acception simple. — L'acception formulée par l'exponentielle simple $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\right)$ sera plus particulièrement qualifiée d'acception *simple*.

Acception réflexe. — L'acception formulée par la double exponentielle $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ sera qualifiée d'acception *réflexe*.

Si l'on considère à la fois plusieurs directions, elles seront dites de *même réflexité* ou de *réflexité différente* suivant qu'elles seront, ou non, comprises dans un même plan passant par l'axe des x.

Distinction des quantités d'après leur acception. — Les *modules* étant supposés de même nature, les quantités se distingueront par leur *acception*, et cette distinction devra naturellement se substituer à celle du *réel* et de l'*imaginaire*, qui ne se serait sans doute pas établie en algèbre si l'on avait su, dès le principe, interpréter la signification du symbole $\sqrt{-1}$ et de ses fonctions exponentielles.

Les expressions analytiques de plusieurs quantités de *même acception* jouissent d'ailleurs de cette propriété que leurs modules sont susceptibles de réduction immédiate par voie d'addition ou de soustraction, car on a évidemment :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \pm B\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = (A \pm B)\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Au contraire, les quantités d'acception différente $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ et $B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$,... ne pourront s'introduire dans le calcul que sui-

vant des règles qui seront exposées ci-après : au Chapitre 2 pour leur combinaison comme éléments de *sommes algébriques* ; au Chapitre 4, comme éléments de *produits* ou comme *facteurs*.

Indifférence d'une réforme du langage scientifique. — De ce que la distinction des quantités d'après leur *acception* doit se substituer logiquement à celle du *réel* et de l'*imaginaire*, on ne saurait attendre qu'il résulte une réforme immédiate ou même prochaine du langage scientifique, à supposer que des locutions impropres finissent plus tard par en être bannies : et cela même n'est rien moins que certain, si l'emploi de ces locutions demeure commode. Cela n'aura aucun inconvénient, pourvu qu'on s'entende sur les mots. Ainsi, on continuera longtemps, sinon toujours, de dire : « les « racines *réelles* (pour les racines positives et négatives) et les ra- « cines *imaginaires* d'une équation... L'axe *réel* et l'axe *imaginaire* « d'une hyperbole... Les symboles *imaginaires* pour les coefficients « de *direction* ou *d'acception*... »

Nous ne renonçons pas nous même à user, à l'occasion, du bénéfice de cette remarque.

4. — Interprétation algébrique des symboles d'acception. Racines de l'unité. — La signification *géométrique* du symbole $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$ étant établie comme on vient de le faire, il importe, dès à présent, d'interpréter sa signification *algébrique*. Elle se résume en un mot : le coefficient de direction ou *l'acception* $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$ est *l'expression générale* des *racines de l'unité*.

Pour le faire voir, commençons par considérer le coefficient *d'acception simple* $\sqrt{-1}^{\alpha}$ qui caractérise les directions comprises dans le plan horizontal.

A cause de $(+1) = \sqrt{-1}^{4}$, ou plus généralement $(+1) = \sqrt{-1}^{4k}$, on a :

$$\sqrt[n]{+1} = \sqrt{-1}^{\left(\frac{4k}{n} = k\frac{4}{n} = \alpha\right)}$$

Si, dans cette expression, on fait successivement :

$$k = 1 \ldots. \quad 2 \ldots. \quad 3 \ldots. \quad k \ldots. \quad (n-1) \ldots. \quad n$$

on obtient n valeurs différents de α :

$$\alpha = \frac{4}{n}, \ldots. \; 2\left(\frac{4}{n}\right), \ldots. \; 3\left(\frac{4}{n}\right), \ldots. \; k\left(\frac{4}{n}\right), \ldots. \; (n-1)\left(\frac{4}{n}\right), \ldots. \left[n\left(\frac{4}{n}\right) = 4\right]$$

auxquelles correspondront n rayons équidistants qui partageront la

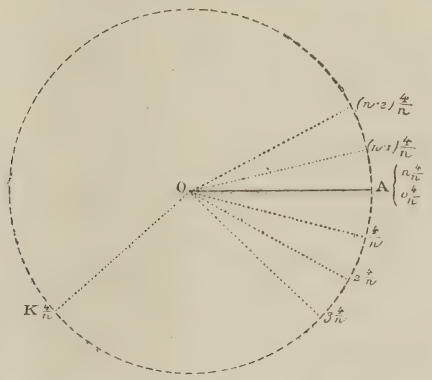


Fig. 5.

circonférence en n parties égales à $\left(\frac{4}{n}\right)$, et qui ont respectivement pour expression analytique :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = \sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}, \; \sqrt{-1}^{2\frac{4}{n}}, \sqrt{-1}^{3\frac{4}{n}}, \ldots. \sqrt{-1}^{k\frac{4}{n}}, \ldots. \sqrt{-1}^{(n-1)\frac{4}{n}},$$
$$\left(\sqrt{-1}^{n\frac{4}{n}} = \sqrt{-1}^{4} = 1\right)$$

ou encore :

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{-1}^{\alpha} = \sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}, \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^2, \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^3, \ldots. \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^k, \ldots. \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{n-1}, \\ \left[\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^n = \sqrt{-1}^{4} = 1\right] \ldots. \end{array}\right\} [a].$$

Ces n rayons sont la représentation graphique des n racines n^e de

l'unité puisqu'en élevant à la puissance n l'expression de l'une quelconque d'entre elles, on obtient :

$$\left[\sqrt{-1}^{\,k\,\frac{4}{n}} = \left(\sqrt{-1}^{\,4\,k}\right)^{\frac{1}{n}}\right]^n = \left[\sqrt{-1}^{\,4\,k} = 1\right]$$

Il suit de là, *graphiquement*, que si l'on part de ce rayon $\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^k$ et qu'on passe par ceux qui ont pour expression analytique ses puissances succcessives, c'est-à-dire :

$$\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^k \quad , \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{2k} \quad ,\ldots \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{lk} \quad ,$$

on arrivera nécessairement à : $\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{nk} = \sqrt{-1}^{\,4\,k} = 1$, c'est-à-dire au rayon représenté *graphiquement* par OA dirigé dans le sens des x positifs.

Les rayons intermédiaires ne pourront être autres d'ailleurs que ceux de la série $[a]$; car, dès que l'exposant lk dépassera n, on pourra écrire : $lk = n + \overline{lk - n}$, $\overline{lk - n}$ étant l'un des nombres **1**, **2**, **3**,... $(n - 1)$, et on aura :

$$\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{lk} = \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{(n+\overline{lk-n})} = (\sqrt{-1}^{\,4} = 1) \times \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{\overline{lk-n}} = \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{\overline{lk-n}}$$

La proposition est donc démontrée pour le plan *horizontal.*

Supposons maintenant que ce plan se relève autour de l'axe des x de manière à prendre l'inclinaison α'.

Les mêmes rayons occuperont les mêmes positions relatives, et l'expression analytique de l'un quelconque d'entre eux deviendra :

$$\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{k\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\frac{4k}{n}}$$

Mais, en partant *graphiquement* de ce rayon, et passant par ceux qui ont pour expression analytique ses puissances successives, on arrivera nécessairement aussi au rayon représenté graphiquement

par OA. Le rayon OA a donc également pour expression analytique :

$$\left[\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{k\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right]^n = \sqrt{-1}^{4k\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{4k}$$

On en conclut que $\sqrt{-1}^{4k\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{4k} = 1$, d'où résulte que $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, aussi bien que $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}}$, est une racine n^e de l'unité.

Comme α' peut passer par tous les états de grandeur entre 0 et 4, il s'ensuit que toutes les génératrices du cône engendré par la rotation de $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}}$ autour de l'axe des x représentent des racines de l'unité de même indice n, et de même rang k que $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}}$.

Si l'on convient de distinguer ces racines par les mêmes dénominations que les *acceptions*, l'expression $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\frac{4k}{n}}$ sera celle des racines *réflexes* par rapport à la racine *simple* (ou *principale*) $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}}$.

Etant ainsi établi que toute racine n^e de l'unité a pour expression $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, il est à peine besoin de faire remarquer que, réciproquement, toute expression $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est une racine de l'unité dont l'indice n se détermine en posant $\alpha = \frac{4k}{n}$, d'où $n = \frac{4k}{\alpha}$.

En donnant à k la *plus petite valeur entière* (k_1) nécessaire pour que n soit lui-même un nombre entier, on aura la plus petite valeur (n_1) de n.

Mais k pourra recevoir toutes les valeurs entières (hk_1) auxquelles correspondrait l'indice (hn_1). On sait en effet, que toutes les racines de l'équation $(x^n - 1) = 0$ satisfont en même temps à l'équation $x^{hn} - 1 = 0$, puisque celle-ci peut s'écrire $(x^n)^h - 1 = 0$.

En résumé, dans la sphère de rayon 1, un rayon quelconque $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est une racine de l'unité dont l'indice n se détermine comme il vient d'être dit :

Il en résulte, en d'autres termes, que l'unité considérée comme un *module*, n'a d'autres racines que *l'unité elle-même*, caractérisée en outre par une *acception* qui indique la *direction* suivant laquelle le *module concret* auquel l'unité sert de mesure, doit être envisagé dans la question dont on s'occupe.

On montrerait aisément que cette conception de la représentation géométrique des racines de l'unité conduit à la confirmation des propriétés de ces racines, étudiées en algèbre à l'occasion de la résolution de l'équation binôme. Mais il serait hors de propos d'y insister ici. On y reviendra aux applications [n° 48].

On verra toutefois, dès le chapitre suivant [n° 12] que le développement de l'expression $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ conduit aux formules trigonométriques connues pour les racines de l'unité positive ou négative.

5. — Comparaison des formules où les arcs sont exprimés en prenant pour unité : 1° le rayon, 2° le quadrant. — Faisons, avant de poursuivre, au sujet des expressions analytiques des directions, une remarque nécessaire pour prévenir toute hésitation dans le calcul.

On suppose d'ordinaire, dans les formules algébriques où il entre des arcs servant de mesure aux angles correspondants, que les nombres qui les expriment sont des longueurs d'arcs rectifiés, prises sur la circonférence de rayon 1, la demi-circonférenee ayant pour développement $\pi = 3,1415...$ Et l'on est conduit à écrire par exemple :

$$\sin\frac{\pi}{2} = 1 \quad , \quad \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Il est clair que, quand il s'agira des exponentielles $\sqrt{-1}^{\alpha}$,

$\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$, où α et α' sont exprimés en fonction du quadrant ou de l'angle droit pris pour unité, on devra écrire le cas échéant :

$$\sin 1 = 1 \quad , \quad \cos. 1 = 0 \ldots. \text{ etc.}$$

Il serait facile d'ailleurs de transformer ces exponentielles en y faisant entrer les rectifications des arcs. Désignant ces rectifications par a et a', on aurait :

$$\frac{\alpha}{1} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a}{\pi} \quad , \quad \frac{\alpha'}{1} = \frac{a'}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2a'}{\pi}$$

et les exponentielles deviendraient :

$$\sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}} \quad , \quad \sqrt{-1}^{\frac{2a}{\pi}\sqrt{-1}^{\frac{2a'}{\pi}}}$$

Mais l'usage de ces formes introduirait évidemment, dans l'écriture et dans le langage, une complication anssi gênante qu'inutile. Nous nous en tiendrons donc aux formes que nous avons établies d'abord, sauf à recourir aux dernières dans le cas d'un rapprochement avec des formules algébriques ordinaires.

Celles-ci d'ailleurs pourront également être rendues comparables à nos exponentielles en y faisant inversement :

$$a = \frac{\pi}{2}\alpha \quad , \quad a' = \frac{\pi}{2}\alpha'.$$

CHAPITRE II

Calcul des expressions analytiques des quantités considérées comme éléments de sommes. Composition des droites.

---

6. — Rappel des principes de la composition géométrique des droites.
7. — Equation générale de la composition des droites, déduite de leur expression analytique.
8. — Equation du contour formé par une droite et par ses projections sur les trois axes coordonnés. — Equation élémentaire et fondamentale (F) de la composition des droites.
9. — Développement des équations d'un contour polygonal, et détermination des éléments de la résultante de ce contour.
10. — Conséquence : Toute fonction de quantités *dites* imaginaires est réductible à la forme $\left(L+M\sqrt{-1}+N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ impliquant séparément, si la fonction est nulle, ($L=0$, $M=0$, $N=0$). Démonstration directe de cette proposition par la théorie des acceptions. Concordance avec la théorie des quaternions.
11. — Equations fondamentales (f_1, f_2, f_3) des directions comprises dans chacun des 3 plans coordonnés.
12. — Formules trigonométriques des racines de l'unité. Formules principales de la trigonométrie rectiligne. Formule de Moivre.
13. — Projections d'un contour polygonal sur les trois plans coordonnés.
14. — Autre figure (F') de l'équation fondamentale (F) de la composition des droites. Le rapprochement de (f_1) avec (F') conduit à l'étude des arcs *dits* imaginaires.

6. — Composition géométriques des droites. — Nous allons maintenant chercher le moyen de relier par une équation les expressions de plusieurs quantités de même nature, mais d'acception différente, telles que $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, $B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$, C....., et qu'il s'agirait de combiner comme éléments de *sommes* algébriques.

Nous nous appuierons, à cet effet, sur les principes de la *composition géométrique* des droites que nous commencerons par rappeler.

Nous en empruntons l'exposé au « *Traité de Mécanique* » de M. E. Collignon.

I. — « On appelle [*cinématique*, n^{os} 49-50] résultante géométrique « d'un certain nombre de droites AB, A*c*, A*d*, A*e*....., issues d'un

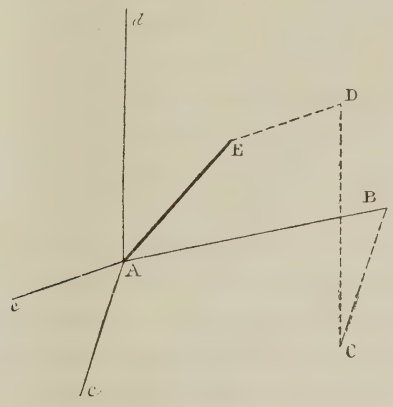


Fig. 6.

« même point de l'espace et dirigées chacune dans un sens défini, « la droite AE qui joint le point A à l'extrémité E du contour po- « lygonal obtenu en menant, par l'extrémité B de la première « droite AB, une droite BC égale et parallèle à la seconde droite « A*c*, dans le sens même où cette droite est dirigée ; — par le « point C, une droite CD égale et parallèle à la troisième droite « A*d*, et dans le même sens que A*d* ; — par le point D enfin, une « droite DE égale et parallèle à A*e*, et dirigée dans le même sens « que A*e*. — La *résultante* a le sens AE. — Les droites AB, A*c*, « A*d*, A*e*, sont appelées les *composantes* et l'opération prend le « nom de *composition*.

« Les propositions suivantes se démontrent très facilement :

« 1° La résultante géométrique de plusieurs droites données est « indépendante de l'ordre dans lequel on les compose.

« 2° La résultante géométrique de plusieurs droites se réduit à « leur somme quand toutes ces droites ont la même direction et le « même sens.

« 3° La résultante géométrique de plusieurs droites qui ont la

« la même direction, mais non le même sens, est la somme algé-
« brique de ces droites prises avec le signe (+) quand elles sont
« dirigées dans un sens, et avec le sens (—) quand elles sont diri-
« gées en sens contraire.

« 4° Convenons que R désignant une droite finie de longueur
« égale à R, menée à partir du point A dans une direction et un
« sens déterminés, (—R) représentera une droite égale menée à
« partir du point A dans la même direction, mais en sens opposé.
« Nous pourrons dire que si R est la résultante géométrique de
« droites données P, P′, P″,... le polygone formé par la compo-
« sition des droites P, P′ P″... et (—R) se fermera de lui-même ;
« — réciproquement, soit un polygone fermé, plan ou gauche,
« composé des droites P, P′, P″ prises chacune dans le sens où
« elles seraient parcourues par un point mobile qui ferait le tour
« du polygone sans jamais rétrograder ; chaque côté P, pris en sens
« contraire, est la résultante géométrique de tous les autres trans-
« portés parallèlement à eux-mêmes en un même point de l'espace.

« 5° Projetons sur une droite donnée, par des plans parallèles à
« un plan fixe, les côtés d'un contour polygonal fermé. — Pour
« attribuer des signes aux projections, supposons un mobile qui

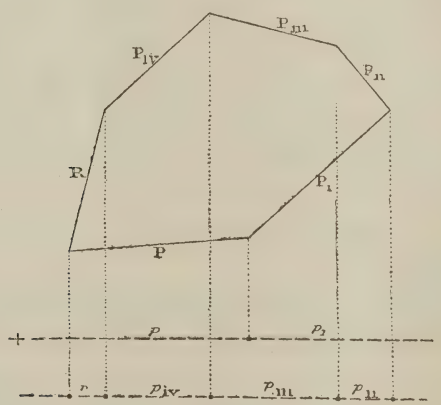


Fig. 7.

« ferait le tour du polygone. — Projetons ce mouvement sur la
« droite, et donnons le signe (+) aux côtés projetés qui sont par-

« courus dans un sens par la projection du mobile, et le signe (—) « aux côtés projetés qui sont parcourus en sens contraire ; cela « posé, la somme algébrique des projections des côtés sur la droite « sera égale à *zéro* ($p+p_{\text{I}}-p_{\text{II}}-p_{\text{III}}-p_{\text{IV}}-r=0$).

« 6° Par suite, la projection de la résultante, prise avec son « signe, est la somme algébrique des projections des composan- « tes ($r=p+p_{\text{I}}-p_{\text{II}}-p_{\text{III}}-p_{\text{IV}}$).

« 7° Lorsque la projection du polygone sur la droite se fait par « des plans normaux, la projection d'un côté est, en grandeur et en « signe, le produit de la valeur absolue du côté par le cosinus de « l'angle formé par la direction de ce côté, avec la direction po- « sitive de la droite ; de sorte que, si on appelle α, α_1, α_{11}..., les « angles successifs faits par les directions P, P′, P″,... avec la di- « rection, positive de l'axe de projection, la résultante des droites « P, P′, P″... faisant un angle λ avec la même direction, on aura :

$$\text{R}\cos\lambda = \text{P}\cos\alpha + \text{P}'\cos\alpha_1 + \text{P}''\cos\alpha_{11} + \ldots\ldots = \Sigma\,\text{P}\cos\alpha$$

« Si donc on propose de composer des droites P, P′, P″ faisant « avec trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz des angles donnés :

$$\alpha,\ \alpha_1\ \alpha_{11}\ldots\ -\ \beta,\ \beta_1,\ \beta_{11}\ldots\ -\ \gamma,\ \gamma_1,\ \gamma_{11}\ldots,$$

« on trouvera la résultante R et les trois angles λ, μ, ν, qu'elle « fait avec les mêmes axes, en résolvant les équations :

$$\text{R}\cos\lambda = \Sigma\,\text{P}\cos\alpha\ ,\quad \text{R}\cos\mu = \Sigma\,\text{P}\cos\beta\ ,\quad \text{R}\cos\nu = \Sigma\,\text{P}\cos\gamma.$$

« Les angles α, β, γ,... α_1, β_1, γ_1,... α_{11}, β_{11}, γ_{11}..., et λ, μ, ν, « sont d'ailleurs liés par les relations :

$$1=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\cos^2\alpha_1+\cos^2\beta_1+\cos^2\gamma_1=\ldots\ldots=\cos^2\lambda+\cos^2\mu+\cos^2\nu.$$

II. — « On peut appeler [*statique*, n° **27**] *somme géométrique* de « plusieurs quantités a, b, c, représentées en grandeur et en di- « rection par des droites issues d'un même point 0, et dirigées « comme on voudra dans l'espace, la résultante S de ces quantités »

— composées d'après les principes qui précèdent. — « On *indique* « l'opération de la composition par la *notation* :

$$\text{« } \overline{S} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \ldots \text{ »}$$

7. — **Equation générale de la composition des droites.** — Cette *notation* n'est en effet qu'une *indication*, et une *indication* tout à fait *incomplète* de l'opération de la composition des droites puisque leurs longueurs seules y figurent, abstraction faite de leurs directions ; aussi, dans les méthodes des équipollences et des quaternions où la même notation est employée, n'en tire-t-on parti qu'à l'aide d'artifices particuliers de calcul, et en établissant en outre d'autres relations pour les inclinaisons.

Au contraire, la notation se transforme immédiatement en *équation rigourense* et *complète*, si on y remplace $\overline{S}$, $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$, par les expressions analytiques des droites ; sauf à développer trigonométriquement ces expressions, comme on va l'expliquer tout à l'heure [n^{os} 8, 9].

On peut dès lors résumer comme il suit l'opération de la composition des droites, et en poser l'équation générale :

Etant données les droites $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, $B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$, C....., issues d'un même point, leur *résultante* ou somme *géométrique* s'obtient en les disposant bout à bout de manière à former un contour polygonal composé de côtés respectivement égaux et parallèles à ces droites.

Si ce contour demeure ouvert, on le fermera par un côté $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$ qui sera la résultante géométrique du système, et on pourra écrire :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} + B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} + C...$$

Si le contour se ferme de lui-même, R est nul ; et en prenant $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ pour l'expression générale d'une des composantes, l'équation devient :

$$\Sigma A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = 0.$$

Elle se traduit par cette proposition qui renferme, à proprement parler, toute la théorie de la composition des droites :

Dans tout contour fermé, plan ou gauche, composé d'éléments rectilignes, la somme algébrique des expressions analytiques de ces éléments est nulle.

8. — **Equation élémentaire et fondamentale [F] de la composition des droites.** — Considérons le contour formé par l'une des composantes A et ses projections sur les trois axes coordonnés.

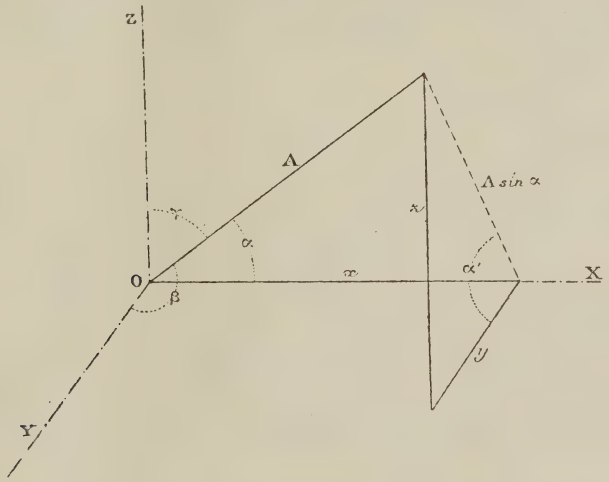


Fig. 8.

La valeur absolue de ces projections est :

$$x = A\cos\alpha, \qquad y = A\sin\alpha\cos\alpha', \qquad z = A\sin\alpha\sin\alpha',$$

d'où

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{z}{y}$$

et, à cause de : $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha.\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha\sin^2\alpha' = 1,$

$$x^2 + y^2 + z^2 = A^2.$$

Les expressions analytiques de ces mêmes projections sont respectivement :

$$x = A\cos\alpha,\ y\sqrt{-1} = A\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha',\ z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = A\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'.$$

On aura donc :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = A(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'.)$$

Si l'on suppose le module A égal à l'unité, on a simplement, pour l'équation *fondamentale* et *élémentaire* de la composition des droites :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha' \ldots\ldots [F]$$

Il résulte de là, sans qu'il soit besoin de plus amples explications, que :

1° $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$

aussi bien que :

$$A^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

est l'équation de la sphère de rayon A.

2° Tout trinôme $(a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ représente en grandeur et en direction, une droite $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ avec

$$A = \sqrt{a^2+b^2+c^2}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}, \quad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{c}{b}.$$

Dans le cas où l'on a $(a^2+b^2+c^2=1)$, le trinôme ne représente plus qu'un coefficient de direction, ou qu'un rayon de la sphère de rayon 1, ou qu'une racine de l'unité [N° 4].

9. — Développement des équations d'un contour polygonal. — Reprenant les données du N° 7, c'est-à-dire considérant le contour *formé* par les composantes dont l'expression générale est $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, et *fermé* par la résultante $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$; supposant toujours d'ailleurs les composantes et la résultante transportées à l'origine des coordonnées, et désignant par (x, y, z) ... (X, Y, Z)

les coordonnées de leurs extrémités, on pourra, au moyen de l'équation générale du N° 8, écrire la triple équation :

$$\left\{\begin{array}{c} \mathrm{R}\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} \\ = \mathrm{X} + \mathrm{Y}\sqrt{-1} + \mathrm{Z}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \\ = \mathrm{R}(\cos\rho + \sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho') \end{array}\right\} =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} \Sigma\mathrm{A}\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \\ = \Sigma(x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}) \\ = \Sigma\mathrm{A}(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha') \end{array}\right\}$$

Remarquons cependant que, dans les deux dernières formes, les *modules* des termes de même acception dans chaque membre sont, *d'une part*, les projections de la résultante, *d'autre part*, les sommes algébriques des projections des composantes sur les trois axes coordonnés.

Or, d'après la théorie de la composition des droites [N° 6, 1-6°], il y a *égalité* entre ces modules de *part et d'autre*.

On pourra donc écrire les trois équations doubles :

$$\begin{array}{lcl} [\ \mathrm{X} = \mathrm{R}\cos\rho\ ] & = & [\ \Sigma x = \Sigma\mathrm{A}\cos\alpha\ ] \\ [\ \mathrm{Y} = \mathrm{R}\sin\rho\cos\rho'\ ] & = & [\ \Sigma y = \Sigma\mathrm{A}\sin\alpha\cos\alpha'\ ] \\ [\ \mathrm{Z} = \mathrm{R}\sin\rho\sin\rho'\ ] & = & [\ \Sigma z = \Sigma\mathrm{A}\sin\alpha\sin\alpha'\ ] \end{array}$$

Ces équations, débarrassées des symboles d'acception, fourniront le moyen de calculer la grandeur de la résultante (R), de ses composantes (X, Y, Z), et des angles (ρ et ρ') qui caractérisent sa direction.

Elles représentent notamment, par exemple, la composition des forces appliquées à un même point de l'espace, puisqu'en appelant α, β et γ les angles formés par la direction d'une des composantes avec les axes des x, des y et des z, les équations connues de cette composition sont :

$$\mathrm{X} = \Sigma\mathrm{A}\cos\alpha, \quad \mathrm{Y} = \Sigma\mathrm{A}\cos\beta, \quad \mathrm{Z} = \Sigma\mathrm{A}\cos\gamma,$$

et qu'on a, d'après la figure 8 :

$$\sin\alpha\cos\alpha' = \cos\beta, \qquad \sin\alpha\sin\alpha' = \cos\gamma.$$

10. — Conséquence. Toute fonction de quantités dites imaginaires est réductible à la forme $(L+M\sqrt{-1}+N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ **impliquant séparément, si la fonction est nulle,** $\mathbf{L}=0$, $\mathbf{M}=0$, $\mathbf{N}=0$. — Il résulte de là que, quand une équation analytique établie au moyen des symboles d'acception, aura été développée conformément à la formule fondamentale (F) du N° 8, et ramenée, en faisant passer tous les termes dans le 1er membre et groupant ensemble ceux de même acception, à la forme :

$$L+M\sqrt{-1}+N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = 0 \ldots\ldots \qquad (1)$$

on aura séparément et simultanément :

$$L=0, \qquad M=0, \qquad N=0$$

pour les équations propres au calcul des grandeurs des inconnues.

Cette conséquence n'est que l'extension de la proposition admise en algèbre, que si l'on a :

$$a+b\sqrt{-1}=0$$

on doit avoir séparément et simultanément :

$$a=0, \qquad b=0.$$

Il importe de bien établir que cette extension n'a rien de contradictoire avec les notions véritablement acquises à la science au sujet de la forme des quantités imaginaires, notions dont on exagère et dont on fausse parfois la portée en disant : « *On démontre « que toute fonction de* $\sqrt{-1}$ *est réductible à la forme* $(p+q\sqrt{-1})$. »

Si cela était vrai, si dans l'équation (1) ci-dessus, le terme $N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ pouvait se résoudre en $(L'+M'\sqrt{-1})$, cette équation devenant :

$$(L+L')+(M+M')\sqrt{-1}=0,$$

on aurait séparément :

$$L + L' = 0, \qquad M + M' = 0,$$

et on n'en pourrait déduire que les éléments d'un polygone *plan*, contrairement à ce que nous venons de voir tout à l'heure (N° 9).

La proposition énoncée ci-dessus en termes trop absolus est donc erronée, et c'est d'ailleurs avec plus de réserve que Navier, entre autres, s'exprime à cet égard (*Résumé des leçons d'analyse données à l'École Polytechnique*, car il termine l'article relatif aux imaginaires par les mots (N° 135) « ... et en général, on *admet* » (Il ne dit pas : on *démontre*) « que toute fonction formée de quan- « tités imaginaires peut se ramener à la forme $P + Q\sqrt{-1}$, P et Q « désignant des quantités réelles. »

Ce que Lagrange, après d'Alembert, a démontré dans son *Traité de la résolution des Equations numériques* (Note IX, *Sur la forme des Racines imaginaires*), c'est « qu'une quantité algébrique quel- « conque, composée de tant d'imaginaires qu'on voudra de la « forme $(a+b\sqrt{-1})$ peut toujours se réduire à la même forme. » — Il a notamment envisagé l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})}$, où y est fonction de x, mais où m et n sont des *constantes*.

Or, la théorie des acceptions arrive à la même conclusion, en commençant par transformer, comme suit, l'expression considérée.

D'après les formules du N° 8, réduites à deux coordonnées, on posera :

$$x + y\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}^{\alpha}$$

d'où :

$$x = a\cos\alpha, \quad y = a\sin\alpha, \quad a = \sqrt{x^2+y^2}, \text{ et } \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$

de sorte qu'on aura :

$$x + y\sqrt{-1} = \sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{-1}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}}$$

On aurait de même :

$$\left(m + n\sqrt{-1} = a'\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \sqrt{m^2+n^2} \cdot \sqrt{-1}^{\operatorname{arc\,tg}\frac{n}{m}} \cdot$$

Conservant, pour abréger, les notations a, α, a' et α', il en résultera l'équation identique :

$$(x+y\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})} = \left(a\sqrt{-1}^{\alpha}\right)^{\left(a'\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

dans laquelle a et α sont des variables comme x et y, tandis que a' et α' sont des constantes comme m et n.

Soit figurée en (F) sur le plan horizontal, la courbe définie par

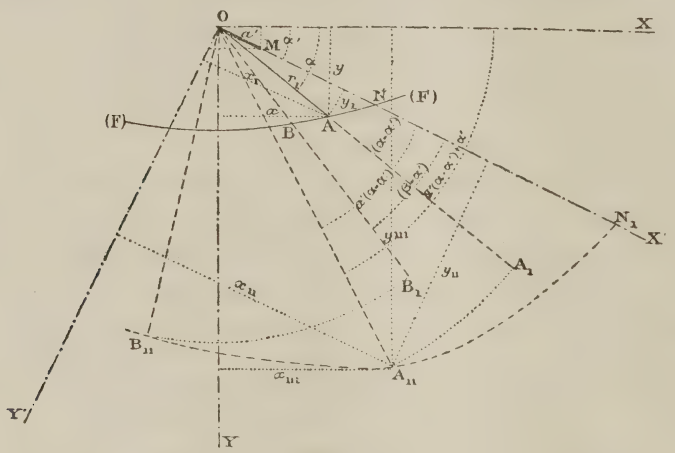


Fig. 9.

l'équation $F(x\,.\,y)=0$ en même temps que par l'équation analytique : $x+y\sqrt{-1}=a\sqrt{-1}^{\alpha}$; soit A un point de cette courbe tel que l'angle $AO\,x=\alpha$, de telle sorte que $OA=a\sqrt{-1}^{\alpha}$.

Soit d'autre part figuré $OM=a'\sqrt{-1}^{\alpha'}$, le point M étant tel que $OM=a'$ et que l'angle $MOx=\alpha'$.

OM est l'exposant constant de la variable OA, et $(OA)^{OM}$, à déterminer de grandeur et de direction, sera le rayon vecteur, correspondent à $OA=a$, du lieu géométrique représenté par l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(m+n\sqrt{-1})}$.

Remarquons cependant que le résultat ne saurait dépendre du système d'axes auquel sont rapportées les données, pourvu que OM et OA conservent leurs valeurs, et leur position relative.

Prenons OMX′ pour nouvel axe des x et sa perpendiculaire OY′ pour nouvel axe des y. En appelant x_1 et y_1 les coordonnées du point A par rapport aux nouveaux axes, on aura, comme on sait :

$$x=x_1\cos\alpha'-y_1\sin\alpha' \qquad y=x_1\sin\alpha'+y_1\cos\alpha'$$

et l'équation (1) deviendra :

$$\left[(x_1\cos\alpha'-y_1\sin\alpha')+(x_1\sin\alpha'+y_1\cos\alpha')\sqrt{-1}\right]\left[m+n\sqrt{-1}=a'\sqrt{-1}^{\alpha'}\right]$$
$$=(a\sqrt{-1})^{\alpha\,(a'\sqrt{-1}\,\alpha')} \qquad \ldots\ldots\ (1)^{bis}$$

Diminuant les arcs de α', d'où $\cos(\alpha'-\alpha')=1, \sin(\alpha'-\alpha')=0$, $\sqrt{-1}^{(\alpha'-\alpha')}=1$, on aura :

$$(x_1+y_1\sqrt{-1})^{a'}=\left\{\left[a\sqrt{-1}^{(\alpha-\alpha')}\right]^{a'}=a^{a'}\sqrt{-1}^{\,a'(\alpha-\alpha')}\right\}$$

Posant $(\alpha-\alpha'=\alpha_1)$, et désignant par x'' et y'' les coordonnées du lieu par rapport aux nouveaux axes, on aura :

$$x''+y''\sqrt{-1} \;=\; a^{a'}\sqrt{-1}^{a'\alpha_1} \qquad (2)$$

avec

$$\sqrt{x''^2+y''^2}=a^{a'}, \text{ et } \operatorname{tg} a'\alpha_1=\frac{y''}{x''}$$

C'est l'équation analytique d'une courbe *plane* facile à construire par points.

Si la courbe donnée (F) coupe l'axe des X′ au point N, le point N_1, tel que $ON_1=(ON)^{a'}$, appartiendra au lieu, et en effet : pour $\alpha_1=o$, on aura $x''=a^{a'}$, et $y''=o$.

Pour le point A de la courbe (F), si $(OA)^{a'}=OA_1$, le point A_1 devra être transporté en A_{II}, tel que l'angle $A_{II}OX'=a'\alpha_1$.

Pour le point B de la courbe (F), si $(OB)^{a'}=OB_1$, le point B_1 devra être transporté en B_{II}, tel que l'angle $B_{II}OX'=a'\beta_1$.

Et ainsi de suite.

Il est manifeste d'ailleurs, d'après la figure, que pour avoir l'é-

quation du lieu par rapport aux axes primitifs, en appelant alors x''' et y''' ses coordonnées courantes, il suffirait d'ajouter α' à l'arc caractéristique de l'acception, c'est-à-dire d'écrire, en rétablissant $(\alpha-\alpha')$ à la place de α_1 :

$$x''' + y'''\sqrt{-1} = a^{a'}\sqrt{-1}^{[a'\alpha_1+\alpha'=a'(\alpha-\alpha')+\alpha'=a'\alpha-(a'-1)\alpha']} \quad (3)$$

En effet, pour $\alpha=\alpha'$ par exemple, le second membre se réduit à $a^{a'}\sqrt{-1}^{\alpha'}$, comme cela doit être.

Non seulement donc la théorie des acceptions confirme la démonstration de Lagrange en ce qui touche $\left(x+y\sqrt{-1}\right)^{(m+n\sqrt{-1})}$ lorsque m et n sont des constantes ; mais elle fournit le moyen de déterminer le lieu géométrique correspondant : et ce lieu étant une courbe plane, son expression analytique est nécessairement réductible à la forme $(p+q\sqrt{-1})$.

Mais la démonstration de Lagrange ne s'étend pas au cas où m et n seraient aussi des variables, par exemple à une expression telle que $(x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})}$ où y_1 serait une fonction de x_1 comme y est une fonction de x.

L'équation identique (1) s'écrirait de même avec cette différence que a' et α' seraient des variables, aussi bien que a et α.

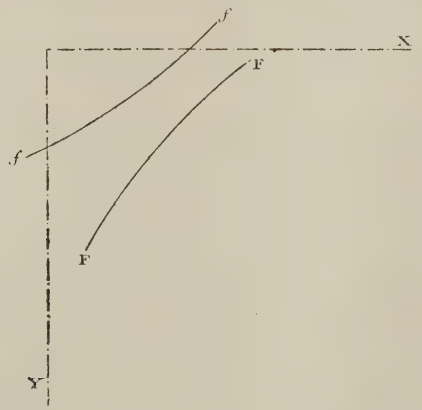


Fig. 10.

Si cependant on figure sur le plan horizontal les courbes (F) et (f) définies respectivement :

(F) par l'équation F $(x, y)=o$ en même temps que par l'équation analytique $x+y\sqrt{-1} = a\sqrt{-1}^{\alpha}$

(f) par l'équation $f(x_1, y_1)=o$ en même temps que par l'équation analytique $x_1+y_1\sqrt{-1}=a'\sqrt{-1}^{\alpha'}$, on n'aperçoit aucun moyen de simplifier la question comme on a pu le faire dans le cas de m et n constants, où la courbe (f) est remplacée par une droite OM invariable de grandeur et de position : de sorte qu'il a suffi d'un changement de coordonnées pour que l'expression analytique primitive $\left(a'\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ de cette droite devienne $(a'\sqrt{-1}^{0} = a')$.

C'est seulement dans la suite de notre travail, et à mesure que nous avancerons dans l'étude de la théorie des acceptions, que nous pourrons établir les règles de calcul susceptibles de conduire à l'interprétation de l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})}$. — Nous renvoyons, pour cet objet, à la fin du mémoire, où l'on verra (n° 72) que le lieu géométrique qu'elle représente est une courbe à double courbure dont le rayon vecteur $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}}$ a un développement de forme $\left(p+q\sqrt{-1}+r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, p, q, r étant, comme R, ρ et ρ', des fonctions de x.

Nous verrons ensuite comment peuvent se réduire et s'interpréter d'autres fonctions du même genre, mais plus compliquées.

Il n'est pas hors de propos de faire remarquer qu'aux deux propositions de l'algèbre ordinaire :

1° « La relation $(L+M\sqrt{-1}=0)$ ne peut être satisfaite qu'autant « qu'on a séparément L=0, M=0 ;

2° « La relation $(L+M\sqrt{-1}+N\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=0)$ ne peut être satisfaite « qu'autant qu'on a séparément L=,0 M=0, N=0 », correspondent respectivement, dans la méthode des *quaternions*, les deux propositions (Laisant, *Introduction à la méthode des quaternions*, 1881, p. 7 et 15) :

1° « A et B étant deux *vecteurs* de direction différente, la relation

« $aA+bB=0$ ne peut être satisfaite qu'autant qu'on a séparément « $a=0$ et $b=0$;

2° « A, B, C étant trois *vecteurs* de direction différente, *et non* « *compris dans un même plan,* la relation $aA+bB+cC=0$ ne peut « être satisfaite qu'autant qu'on a séparément $a=0$, $b=0$ et $c=0$. »

On tirera évidemment le même parti, pour les applications :

En *algèbre*, de l'annulation séparée des modules (L, M, N) respectivement caractérisés par les acceptions $\left(+1,\ \sqrt{-1},\ \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$;

Dans la méthode des *quaternions*, de l'annulation séparée des coefficients (a, b, c,) qui affectent respectivement les vecteurs (A, B, C).

11. — Equations fondamentales (f_1 f_2, f_3) des directions comprises dans chacun des trois plans coordonnés. — Il serait superflu de détailler ce que deviennent les formules du n° 9 dans les trois cas où tous les éléments du contour considéré sont compris dans un des trois plans de projection. — Le lecteur y suppléera aisément.

Nous nous bornerons à écrire, à cause de l'importance des formules, et pour en tirer des conséquences immédiates, ce que devient, dans chacun de ces trois cas, l'équation fondamentale (F) du n° 8.

1° Plan horizontal des xy ($z=0$)... $\alpha'=0$,

d'où : $$\sin\alpha'=o,\quad \cos\alpha'=1.$$

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = \cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha... \qquad [f_1]$$

[Nota. — On rapprochera plus loin (n° 18) l'équation $[f_1]$ de la formule d'Euler.]

2° Plan vertical des xz ($y=0$)... $\alpha'=1$.

d'où : $$\sin\alpha'=1,\quad \cos\alpha'=0.$$

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha \qquad [f_2]$$

3° Plan vertical des yz ($x=0$)... $\alpha=1$.

d'où : $\sin \alpha = 1, \quad \cos \alpha = 0.$

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha' \ldots \qquad [f_3]$$

12. — Formules trigonométriques des racines de l'unité. — Nous avons annoncé [n° 4] qu'on verrait, dès le présent chapitre, comment le développement de l'expression $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ conduit aux formules trigonométriques connues pour les racines de l'unité positive et négative.

Dans l'équation $[f_1]$ du n° 11, remplaçons α par $\frac{\alpha+4k}{n}$; nous aurons :

$$\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4k}{n}} = \cos\frac{\alpha+4k}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{\alpha+4k}{n}$$

Si, dans cette équation, on fait successivement :

$\alpha = 0$ et $\alpha = 2$, on obtient :

$$\alpha = 0 \ldots, \quad \sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}} = \cos\frac{4k}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{4k}{n}$$

$$\alpha = 2 \ldots, \quad \sqrt{-1}^{\frac{2+4k}{n}} = \cos\frac{2+4k}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2+4k}{n}$$

Et si on y remplace 4 par 2π, et 2 par π, ce qui revient (n° 5) à considérer les arcs *rectifiés* au lieu des arcs *exprimés* en *fonction* du *quadrant*, on retombe sur les formules de l'algèbre élémentaire :

Pour les racines de l'unité *positive* :

$$\sqrt{-1}^{\frac{2k\pi}{n}} = \cos\frac{2k\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{2k\pi}{n}$$

Pour les racines de l'unité *négative* :

$$\sqrt{-1}^{\frac{(2k+1)\pi}{n}} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sqrt{-1}\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$

Formules principales de la trigonométrie rectiligne. — On peut encore, de la même équation $[f_1]$, déduire les principales formules de la trigonométrie rectiligne. — On écrira, par exemple :

$$\sqrt{-1}^{(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta)$$

Mais on a :

$$\sqrt{-1}^{(\alpha+\beta)} = \sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{\beta}$$

c'est-à-dire :

$$\cos(\alpha+\beta)+\sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta) = (\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta)$$

En développant et égalant les termes de même acception dans chaque membre, on obtient les formules connues pour $\cos(\alpha+\beta)$ et $\sin(\alpha+\beta)$.

Formule de Moivre. — Si, d'autre part, dans la même équation $[f_1]$ du n° **11**, on remplace α par αm, on a :

$$\sqrt{-1}^{\alpha m} = \cos\alpha m + \sqrt{-1}\sin\alpha m$$

Mais $$\sqrt{-1}^{\alpha m} = (\sqrt{-1}^{\alpha})^{m}.$$

Donc : $$(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)^{m} = \cos\alpha m+\sqrt{-1}\sin\alpha m$$

Cette dernière équation, dite formule de Moivre, est ainsi établie d'une manière aussi simple que rigoureuse.

13. — Projections d'un contour polygonal sur les trois plans coordonnés. — Le contour fermé considéré aux n^{os} 7 et 9 constitue, en général, un polygone *gauche* qui se projette sur chacun des trois plans coordonnés suivant un polygone *plan* dont chaque côté est, respectivement, la projection du côté correspondant du polygone *gauche*. — Il existe donc, pour chaque projection *plane* une équation de l'une des formes indiquées au n° **11** (sauf addition de *modules*) et qui se déduit immédiatement de l'équation même du polygone *gauche*.

Car si l'on désigne par R_1, R_2, R_3 les projections de la résul-

tante R, et par r_1, r_2, r_3 les angles de R_1 et R_2 avec l'axe des x, et de R_3 avec l'axe des y, en faisant attention que $r_3 = \rho'$, on aura, d'après la figure :

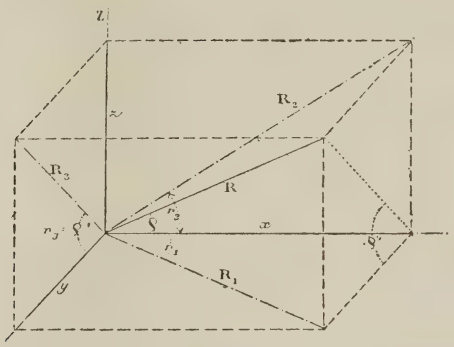


Fig. 11.

Plan des xy $\left\{ \begin{array}{l} R_1\sqrt{-1}^{r_1} = X + Y\sqrt{-1} \\ \text{avec } R_1 = \sqrt{X^2+Y^2} \text{ et tg } r_1 = \dfrac{Y}{X} \end{array} \right.$

Plan des xz $\left\{ \begin{array}{l} R_2\sqrt{-1}^{r_2\sqrt{-1}} = X + Z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \\ \text{avec } R_2 = \sqrt{X^2+Z^2} \text{ et tg } r_2 = \dfrac{Z}{X} \end{array} \right.$

Plan des yz $\left\{ \begin{array}{l} R_3\ \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\rho'}} = Y\sqrt{-1} + Z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \\ \text{avec } R_3 = \sqrt{Y^2+Z^2} \text{ et tg } \rho' = \dfrac{Z}{Y} \end{array} \right.$

Il suffit donc de prendre deux à deux, avec leur acception propre, les trois termes de chaque membre de l'équation du polygone gauche, et l'on pourra écrire ainsi les équations des trois projections planes :

Plan des xy $\left\{ \begin{array}{l} X + Y\sqrt{-1} = \Sigma x + \sqrt{-1}\Sigma y \\ \text{ou } R(\cos\rho + \sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho') = \Sigma A(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha') \end{array} \right.$

Plan des xz $\left\{ \begin{array}{l} X + Z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \Sigma x + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\Sigma z \\ \text{ou } R(\cos\rho + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho') = \Sigma A(\cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha') \end{array} \right.$

Plan des yz $\left\{\begin{array}{l} Y\sqrt{-1}+Z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\Sigma y+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \\ \text{ou } R\sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho') = \\ \Sigma A\,(\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha') \end{array}\right.$

Il n'est d'ailleurs besoin que de deux projections pour déterminer le polygone gauche : aussi l'une quelconque de ces trois équations peut-elle être déduite des deux autres.

14. — Autre figure (F′) de l'équation fondamentale (F) de la composition des droites. — L'équation (F) du n° 8 revient à :

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha+(\sqrt{-1}\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha')\sin\alpha.$$

Et comme on a : (n° 11-3°)

$$(\sqrt{-1}\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha') = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\ldots \qquad [f_3]$$

il en résulte que l'équation (F) des directions comprises dans le plan d'inclinaison α' (ou des directions *dans l'espace*) peut aussi s'écrire, le second membre étant réduit à un binôme :

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} = \cos\alpha+\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)\sin\alpha\ldots \qquad [F]$$

Si on en rapproche l'équation des directions comprises dans le plan horizontal (ou des directions *planes*) [n°11-1°], c'est-à-dire :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = \cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\ldots \qquad [f_1]$$

on reconnaît que, pour passer de $[f_1]$ à [F], il suffit de remplacer, dans $[f_1]$, la *base* $(\sqrt{-1})$ de l'acception *simple* par la *base* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception *réflexe,* qui représente en même temps la *trace* sur le plan des yz ainsi que la *ligne de plus grande pente*, du *plan* d'inclinaison α'

Mais si dans $[f_1]$, d'autre part, on remplace α par $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, on obtient l'équation :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) + \sqrt{-1}\,\sin\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) \qquad [F'']$$

dont le premier membre est identique avec celui de l'équation (F), équivalent au premier membre de [F']. — Il faut donc que le second membre de [F''] soit équivalent au second membre de [F'].

On est ainsi conduit à étudier ce que c'est que l'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$; ce que sont ses lignes trigonométriques, et à examiner si les deux procédés de transition, de $[f_1]$ à [F'] en *opérant sur la base de l'acception*, — ou de $[f_1]$ à [F''] *en opérant sur l'arc*, sont indifférents, et si le second conduira toujours aux mêmes résultats que le premier, dont la correction n'est pas douteuse.

Cette étude et ses conséquences feront l'objet du chapitre suivant.

CHAPITRE III

Etude des angles ou arcs *dits* imaginaires. — Conséquences

15. — Arcs *dits* imaginaires. — Leur interprétation.
16. — Leurs lignes trigonométriques : Modules constants; acceptions variables.
17. — Remarques importantes (I.II) pour l'exactitude des formules trigonométriques, — III. Erreurs de Navier.
18. — Formule d'Euler. — Son identité avec l'équation des directions planes. — Equivalence logarithmique de l'acception simple.
19. — Interprétation de cette équivalence. — Logarithmes des acceptions.— Logarithmes multiples.
20. — Equivalence logarithmique de l'acception réflexe. — Équivalence logarithmique (E) du symbole élémentaire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ de l'acception réflexe.
21. — Fausse équivalence (E') du symbole élémentaire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ de l'acception réflexe, déduite à tort de la formule d'Euler. — Diverses critiques de cette fausse équivalence.
22. — Conséquences de la discussion qui précède. — I. Deux formes, dont une seule admissible, du logarithme de l'acception réflexe. — II. Deux expressions, conciliables, de l'arc logarithme de l'acception $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}$. — III. Introduction en analyse du symbole élémentaire $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ de l'acception réflexe. Elle peut exiger une dérogation aux règles ordinaires du calcul algébrique.
23. — Etude de cette dérogation. — Règle pratique résultant de cette étude, ou règle de l'abbé George. — Trois cas particuliers de la règle générale.
24. — Échelonnage multiple du symbole $\sqrt{-1}$.
25. — Principe de la règle du n° 23 : appréciation exacte des acceptions.— Usage: interprétation des résultats imaginaires ; explication de paradoxes analytiques formulés à l'aide du symbole $\sqrt{-1}$. — Quelques exemples. — I. Diagonale du parallélipipède. — II. Rectification de de la fausse équivalence (E') du n° 21.
26. — Autre déduction erronée de la formule d'Euler. — Fausse expression trigonométrique de l'exponentielle. — Sa rectification.
27. — Déduction exacte de la formule d'Euler. — Expression logarithmique de sin α et cos α. — Leur interprétation concrète.
28. — Transformatiou erronée de ces valeurs par Cauchy.
29. — Interprétation des expressions où $\sqrt{-1}$ figure en exposant.

15. — Arcs *dits* imaginaires. — Leur interprétation. — D'après ce qu'on a vu précédemment [n° 1 — *b*], les deux arcs AM et AP de la figure 3, [en y écrivant α et α' à la place de φ et φ'] ayant pour valeurs α et $(-\alpha)$, ou $\alpha\sqrt{-1}^0$ et $\alpha\sqrt{-1}^2$, l'arc AM′ situé dans le plan d'inclinaison α' aura pour expression analytique $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$.

Le coefficient $\sqrt{-1}^{\alpha'}$, multiplicateur de α dans l'expression $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ a donc la propriété de relever l'arc α autour d'un axe passant par l'origine O des directions et par l'origine A des arcs, dans un plan incliné de α' sur le plan horizontal. Cela revient à dire, d'après les définitions du n° 3, que, dans l'expression $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, α est le *module* et $\sqrt{-1}^{\alpha'}$ est *l'acception*.

L'interprétation rationnelle de ce qu'on appellerait un arc *imaginaire* par rapport à un arc *réel*, est donc désormais établie. Ainsi $(\alpha\sqrt{-1})$, par exemple, sera l'arc α relevé dans le plan vertical des xz, perpendiculaire au plan horizontal.

16. — Leurs lignes trigonométriques. — Cherchons immédiatement à déterminer les expressions analytiques des lignes trigonométriques de l'arc $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ par rapport à celles de l'arc α. Nous supposerons, dans ce qui suit, le rayon OA égal à l'unité.

En premier lieu, comme *grandeur absolue*, ces lignes sont évidemment invariables puisque le mouvement de rotation les transporte simplement du plan horizontal dans le plan d'inclinaison α'.

Elles ne peuvent donc différer que par *l'acception* ; et chacune d'elles doit prendre pour acception celle de la parallèle qui serait menée, par l'origine des coordonnées, à sa représentation géométrique.

I. *Cosinus*. Le cosinus de $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$, comme celui de α, a pour représentation géométrique OO′ qui demeure immobile dans le mou-

vement de rotation, et qui est d'acception *positive* ou *négative*. On

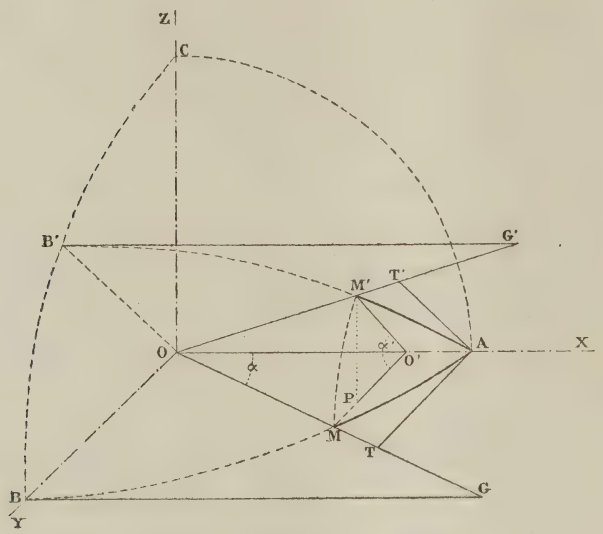


Fig. 12.

a donc : $$OO' = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \cos\alpha.$$

II. *Cotangente.* — La cotangente BG de α devient B'G' dans le mouvement de rotation, et reste parallèle à l'axe des x. L'acception de la cotangente est donc, de même que celle du cosinus, positive ou négative, et l'on a :

$$\left[B'G' = \cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)\right] = [BG = \cos\alpha]$$

III. *Sinus.* — La représentation de $\sin\alpha$ est MO', parallèle à l'axe des y, par conséquent d'acception $\sqrt{-1}$. Celle de $\sin\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ est M'O', parallèle à OB', trace du plan d'inclinaison α' sur le plan des yz et d'acception $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$. On a donc :

$$MO' = \sqrt{-1}\sin\alpha, \qquad M'O' = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\sin\alpha.$$

IV. *Tangente.* — Les représentations AT et AT′ des tangentes sont parallèles à celles des sinus. On a donc également :

$$AT = \sqrt{-1}\,\mathrm{tg}\,\alpha \quad , \qquad AT' = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

V. *Sécante.* — Les sécantes OT et OT′ ont la même direction que les rayons OM et OM′. On a donc :

$$OT = \sqrt{-1}^{\alpha}\,\mathrm{séc}\,\alpha \quad , \qquad OT' = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\,\mathrm{séc}\,\alpha = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}\,\mathrm{séc}\,\alpha$$

VI. *Cosécante.* — Les cosécantes OG et OG′ sont évidemment de même acception que les sécantes, c'est-à-dire qu'on a :

$$OG = \sqrt{-1}^{\alpha}\,\mathrm{coséc}\,\alpha \, , \quad OG' = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\,\mathrm{coséc}\,\alpha = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}\,\mathrm{coséc}\,\alpha$$

De ces rapprochements il résulte :

1° Que, pour le *cosinus* et la *cotangente* dont l'acception demeure invariablement positive ou négative, on pourrait écrire :

$$\cos\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \cos\alpha \, , \text{ et } \cot\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \cot\alpha.$$

2° Que, pour les *quatre autres lignes trigonométriques,* celles de $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ ne sauraient s'exprimer directement et algébriquement en fonction de celles de α, et qu'on doit se borner à comparer leurs expressions analytiques respectives, composées [n° 3] de leur double élément : le *module* invariable, et *l'acception* ; qu'enfin, les acceptions des *sinus*, *tangente*, *sécante* et *cosécante* de $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ se déduisent de celles des *sinus*, *tangente*, *sécante* et *cosécante* de α en remplaçant dans ces dernières la base $\sqrt{-1}$ de l'acception simple par la base $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception réflexe, c'est-à-dire en opérant comme il a été expliqué au n° 14 pour passer de l'équation $[f_1]$ des directions *planes* à l'équation [F′] des directions dans *l'espace.*

17. — Remarques importantes pour l'exactitude des formules trigonométriques. — Il est donc établi [n° 15] que des arcs de même *module*, mais *d'acception* différente, sont des arcs égaux, de même origine, mais situés dans des plans différents : et, [n° 16] que les lignes trigonométriques de ces arcs sont de *module invariable*, mais *d'acceptions* qui *diffèrent* suivant celles des arcs eux-mêmes, et suivant les lignes trigonométriques considérées.

De là des remarques d'une extrême importance pour l'exactitude des formules trigonométriques :

I. Les expressions des *modules* des lignes trigonométriques en fonction du *module* de l'arc sont invariables, quelle que soit l'acception de l'arc. Ainsi, les développements en série :

$$\sin \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{1..3} + \frac{\alpha^5}{..5} - \ldots.$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1..4} - \ldots.$$

représentent également les *modules* de $\sin(\alpha\sqrt{-1})$ et $\cos(\alpha\sqrt{-1})$, et il faut bien se garder de substituer $(\alpha\sqrt{-1})$ à α dans le second membre en même temps que dans le premier, ce qui conduirait aux relations absolument dépourvues de sens :

$$\sin(\alpha\sqrt{-1}) = \sqrt{-1}\left(\frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha^3}{1..3} + \frac{\alpha^5}{1..5} + \ldots\right)$$

$$\cos(\alpha\sqrt{-1}) = 1 + \frac{\alpha^2}{1.2} + \frac{\alpha^4}{1..4} + \ldots$$

II. Lorsque l'on considère la somme $(\alpha+\beta)$ de deux arcs α et β qui se mesurent sur la même circonférence, on a, par exemple :

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

Mais, si l'un des arcs (β) devient $(\beta\sqrt{-1})$, comme cela signifie qu'il s'est relevé dans un plan perpendiculaire à celui de l'arc α, il est clair que les résultats qu'on obtiendrait en substituant $(\beta\sqrt{-1})$

à (β) dans le second membre de ces formules seraient complètement faux.

Ces mêmes formules subsisteront, au contraire, si α et β deviennent *en même temps* $(\alpha\sqrt{-1})$ et $(\beta\sqrt{-1})$, sans qu'il y ait d'ailleurs, aucune substitution à faire dans les seconds membres, sauf qu'ils n'exprimeront toujours que des *modules*, et que, pour avoir les expressions *analytiques complètes* de la représentation linéaire des lignes trigonométriques considérées, il faudra affecter ces *modules* des *acceptions* qui leur appartiennent, savoir : l'*acception* $(+1)$ pour les cosinus, l'acception $(\sqrt{-1})$ pour sin $(\alpha+\beta)$, l'acception $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ pour sin $(\alpha\sqrt{-1}+\beta\sqrt{-1})$.

On verra ultérieurement [n° 42] ce qu'on doit entendre par la *somme* d'arcs d'acception différente, telle que $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$.

III. Navier, cependant, a écrit : (*Résumé des leçons d'analyse données à l'école Polytechnique*, n° 116).

« Il importe de considérer d'ailleurs que les développements :

« $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1..3} + \ldots$$

« $$\sin x = x - \frac{x^3}{1..3} + \frac{x^5}{1..5} - \ldots$$

« $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \ldots$$

« subsistent lorsqu'on donne à *l'arc* x une valeur quelconque imaginaire $x = m + n\sqrt{-1}$.

« On peut vérifier, en effet, que la substitution de $(m + n\sqrt{-1})$ à « la place de x dans la première série ou la multiplication des « deux séries qui représentent respectivement les valeurs de e^m et « $e^{n\sqrt{-1}}$ donnent le même résultat.

« On remarquera de même que :

« $$\sin(m + n\sqrt{-1}) = \sin m \cos(n\sqrt{-1}) + \cos m \sin(n\sqrt{-1})$$

« Or, si après avoir formé les développements de sin m et de

« cos $(n\sqrt{-1})$, on les multiplie l'un par l'autre, et on les ajoute au « produit des développements de cos m et de sin $(n\sqrt{-1})$, on trou- « vera le même résultat qu'en faisant $(x = m + n\sqrt{-1})$ dans la « série qui représente la valeur de *sin* x.

« On a également :

$$\text{« } \cos(m + n\sqrt{-1}) = \cos m \cos(n\sqrt{-1}) - \sin m \sin(n\sqrt{-1})$$

« et l'on reconnaît que la différence des produits des développe- « ments de cos m cos $(n\sqrt{-1})$ et sin m sin $(n\sqrt{-1})$ donne le même « résultat que la substitution de $(m + n\sqrt{-1})$ à la place de x dans « la série qui représente *cos* x. »

On vient de voir qu'en ce qui concerne les fonctions trigonométriques *sin* x, *cos* x, sin $(\alpha+\beta)$, cos $(\alpha+\beta)$, les résultats des substitutions et des opérations indiquées par Navier, fussent-ils réguliers algébriquement, seraient absolument illusoires, comme en contradiction avec l'interprétation géométrique des arcs et des lignes trigonométriques considérées.

C'est seulement d'ailleurs dans les fonctions trigonométriques que x représente nécessairement *un arc ;* et dans leurs développements en séries, *cet arc est défini* [Navier n° 109] par « le *nombre* « *abstrait qui exprime la longueur de cet arc dans la circonférence* « *dont le rayon est l'unité.* »

Dans la fonction exponentielle $y = e^x$, x est en général un *autre nombre abstrait* qui représente le *logarithme népérien* de y, et on n'est conduit à le considérer comme un *arc* que dans le cas particulier du rapprochement des séries exponentielle et trigonométrique, qui aboutit à la formule d'Euler.

18. — Formule d'Euler. Son identité avec l'équation des directions planes. — Le développement en série de e^x est en effet, comme on sait :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

Si l'on remplace x par $x\sqrt{-1}$, ce développement devient :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \left(1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1..4} - \frac{x^6}{1..6} + \cdots\right) + \sqrt{-1}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1..3} + \frac{x^5}{1..5} - \cdots\right)$$

Supposant alors que x soit un arc, et le même arc que dans les séries de *cos* x et *sin* x rappelées tout à l'heure [n° **17-I**], on peut écrire :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x \ ,$$

c'est-à-dire la formule d'Euler.

Quelles que soient son importance et son autorité, il faut bien reconnaître qu'on n'y est parvenu ainsi que d'une manière empirique, et le fait même que les résultats de la substitution de $(x\sqrt{-1})$ à x dans les séries trigonométriques sont inadmissibles, serait de nature à inspirer des doutes sur la légitimité de la même substitution dans la série de l'exponentielle e^x, cette opération ne se prêtant d'ailleurs, *à priori*, à aucune interprétation concrète.

Mais, de la théorie même des acceptions, il résulte à la fois un contrôle et une confirmation, extrêmement simples, de la formule d'Euler.

Car si, dans cette formule, on fait $x = \frac{\pi}{2}$, d'où $\cos x = o$, et $\sin x = 1$, il vient :

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{-1},$$

d'où :

$$e^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\frac{2}{\pi}},$$

et, élevant les deux membres à la puissance x :

$$e^{x\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\frac{2x}{\pi}} .$$

Or, x étant un arc mesuré sur la circonférence dont le rayon est l'unité, on sait [n° 5] que $\sqrt{-1}^{\frac{2x}{\pi}}$ est l'expression analytique du rayon qui aboutit à l'extrémité de cet arc, et qu'on a [n°s 5 et **11, 1°**].

$$\sqrt{-1}^{\frac{2x}{\pi}} = \cos x + \sqrt{-1}\sin x.$$

Cette dernière relation ayant été dûment démontrée, la *formule d'Euler* l'est, par suite, également, et on peut dire qu'elle *équivaut à l'équation des directions planes.*

Pour revenir toutefois à la forme ordinaire [f_1 du n° 11] de cette dernière, où l'arc est exprimé en fonction du quadrant pris pour unité, on sait [n° 5] qu'il faut poser :

$$x = \frac{\pi}{2}\alpha, \text{ d'où } e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha}$$

Nous écrirons donc désormais ainsi l'équation d'Euler :

$$e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

et nous écrirons en même temps :

$$\left(\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}\right) = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha.$$

Il résulte de ce rapprochement qu'en réalité l'*acception simple* a *deux expressions* analytiques, équivalentes l'une comme l'autre à $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$:

La première ($\sqrt{-1}^{\alpha}$), établie directement, et à laquelle appartiendra toujours la dénomination propre d'*acception*, pourrait plus particulièrement être qualifiée d'expression *exponentielle* : — La seconde $\left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}\right)$ serait l'expression *logarithmique* ou l'équivalence *logarithmique* de *l'acception* simple.

19. — Interprétation de cette équivalence. Logarithmes népériens des acceptions. — La relation $\sqrt{-1} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$ est d'ailleurs immédiatement susceptible d'une interprétation concrète.

L'arc α exprimé en fonction du quadrant étant représenté par AM dans le plan horizontal, l'acception $\sqrt{-1}^{\alpha}$ est représentée par le rayon OM.

L'arc $\alpha\sqrt{-1}$ sera représenté par AM′ dans le plan des xz. L'expo-

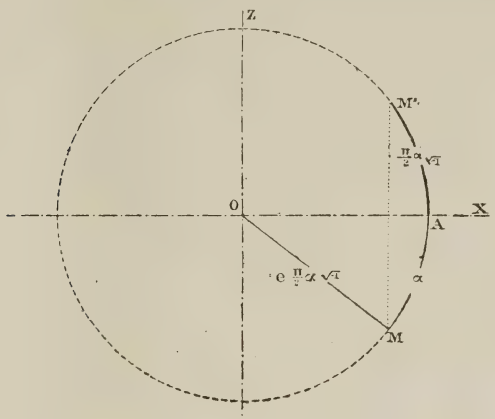


Fig. 13.

sant $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\right)$ de e sera l'expression du même arc *en fonction* du *rayon*, ou la rectification de l'arc α, relevée dans le plan des xz, et on pourra dire :

« Le *logarithme népérien* d'une *acception* est égal à la *rectifica-*
« *tion de l'arc qui la caractérise, relevée dans un plan perpendicu-*
« *laire à celui de l'acception elle-même.* »

Car, en premier lieu, les exposants de e, qui sont successivement :

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}, \qquad \frac{\pi}{2}(2\alpha)\sqrt{-1}, \ldots\ldots \qquad \frac{\pi}{2}(n\alpha)\sqrt{-1}$$

forment bien une progression arithmétique dont la raison est $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\right)$, tandis que les acceptions correspondantes :

$$\sqrt{-1}^{\alpha}, \sqrt{-1}^{2\alpha} = \left(\sqrt{-1}^{\alpha}\right)^2, \ldots\ldots \sqrt{-1}^{n\alpha} = \left(\sqrt{-1}^{\alpha}\right)^n$$

forment une progression géométrique dont la raison est $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\right)$.

En second lieu, la proposition a pu être énoncée d'une manière générale, quoique la formule n'ait été établie que pour l'acception *simple* : car le plan horizontal n'ayant rien d'absolu, et les accep-

tions comprises dans un plan d'inclinaison α' pouvant être ramenées dans le plan horizontal par une rotation autour de l'axe des x, les arcs-logarithmes de ces acceptions se mesureront nécessairement sur la circonférence située dans le plan d'inclinaison $(1+\alpha')$.

Nous verrons toutefois dans un instant (n° 20) comment la formule doit être appropriée au cas de l'acception réflexe.

Mais nous ferons dès à présent les remarques suivantes.

« Le caractère propre de la fonction $(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)$, » égale à $(\sqrt{-1}^{\alpha})$ en même temps qu'à $\left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}\right)$, « c'est qu'elle ne change « pas lorsqu'on augmente l'arc α d'un nombre quelconque de cir- « conférences. » [Vallès. *Des formes imaginaires en algèbre*, T. I, p. 253]. Ecrivons donc aussi :

$$\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}=e^{\frac{\pi}{2}(\alpha+4k)\sqrt{-1}}$$

d'où :

$$\log\left[\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}=\sqrt{-1}^{\alpha}\times(\sqrt{-1}^{4k}=1)=\sqrt{-1}^{\alpha}\right]=\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}+2k\pi\sqrt{-1}.$$

Logarithmes multiples. — Cela veut dire que l'acception $\sqrt{-1}^{\alpha}$ a une infinité de logarithmes, composés d'abord de l'arc rectifié $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\right)$ ci-dessus défini, et ensuite d'un nombre quelconque de circonférences de même acception. — Faisons successivement :

$\alpha=0$, d'où $e^{0}=(+1)$, on aura : $\log(+1)=0+2k\pi\sqrt{-1}$

$\alpha=1$, $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}=(+\sqrt{-1})$, $\log(+\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}+2k\pi\sqrt{-1}$

$\alpha=2$, $e^{\pi\sqrt{-1}}=(-1)$, $\log(-1)=0+(2k+1)\pi\sqrt{-1}$

$\alpha=3$, $e^{\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}=(-\sqrt{-1})$, $\log(-\sqrt{-1})=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}+(2k+1)\pi\sqrt{-1}$

$\alpha=4$, ou $\alpha=4k$, revient à $\alpha=0$.

Supposons maintenant que l'on considère un nombre positif quelconque $N=N\times(+1)=N\sqrt{-1}^{0}$. On aura :

$$\log(N\sqrt{-1}^{0})=\log N+\log(\sqrt{-1}^{0}=1)=\log N+0+2k\pi\sqrt{-1}.$$

Supposons que l'on considère un nombre négatif quelconque : $(-N)=N\times(-1)=N\sqrt{-1}^2$. — On aura :

$$\log(N\sqrt{-1}^2)=\log N+\log(\sqrt{-1}^2=-1)=\log N+(2k+1)\pi\sqrt{-1}.$$

Ces formules s'accordent avec ce qu'on lit, par exemple, dans les Eléments de calcul infinitésimal de M. de la Goupillière [n° 68, p. 90].

« ... Un nombre *positif* x a un *logarithme réel*, Lx, qu'on trouve « dans les tables, et une *infinité* de *logarithmes imaginaires* qu'on « obtient en leur adjoignant des circonférences *imaginaires* ;....., « un nombre *négatif n'a que des logarithmes imaginaires* qui s'ob- « tiennent en adjoignant au logarithme de la valeur absolue un « nombre *impair* de demi circonférences imaginaires. »

20. — Expression logarithmique de l'acception réflexe. — Pour obtenir l'expression *logarithmique* ou l'équivalence logarithmique de l'*acception réflexe*, il suffira [n° 14] de substituer la base $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception réflexe à la base $(\sqrt{-1})$ de l'acception simple dans la relation du n° 18, c'est à dire dans l'équation :

$$\sqrt{-1}^{\alpha}=e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$$

On n'aura donc qu'à écrire :

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}=e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Pour $\alpha'=0$, cette équation se réduit à la relation d'origine.

Pour $\alpha'=1$, elle devient :

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha}=e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}}$$

et enfin, pour $\alpha=1$, elle donne :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\,\sqrt{-1}} \qquad \text{.....[E]}$$

21. Fausse équivalence logarithmique [E'] du symbole $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. — Cette équivalence [E] du symbole élémentaire $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ de l'acception réflexe n'est pourtant pas celle qui a cours dans l'enseignement.

I. — On dit d'ordinaire (par exemple dans le même ouvrage de M. de la Goupillère, n° 65, p. 86), après être parvenu à la relation du n° 18 pour $\alpha=1$, c'est-à-dire à :

$$\sqrt{-1}=e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

« *En élevant les deux membres à la puissance* $\sqrt{-1}$ » ce qui revient algébriquement, pour le second membre, à multiplier l'exposant de e par $\sqrt{-1}$, et à écrire en conséquence

$$\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=\frac{\pi}{2}\times(-1)=-\frac{\pi}{2}\right)$$

« *on obtient ce symbole remarquable :*

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad [E']$$

« *quantité qui a pour valeur* **0.207.875.** »

On lit ailleurs (*Annales* de Gergonne, T. IV, **1813-1814**, p. **222-235**, extrait d'une lettre de *Servois*, reproduite dans l'Essai d'*Argand* réédité par Houël, p. 105) : « ..... *Euler a démontré que l'expression* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ *n'est point imaginaire, mais égale à* $e^{-\frac{\pi}{2}}$. »

Cependant, on n'a jamais interprété l'étrange équivalence [E'].— Or, nous sommes en mesure de le faire, puisque nous avons expliqué [n° 4] que le symbole d'acception $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ est l'expression générale des *racines de l'unité*. — Il en résulte que l'équivalence [E'] peut, en langage ordinaire, et en faisant attention que l'on a :

$$e^{-\frac{\pi}{2}}=(+1)\times\left(e^{-\frac{\pi}{2}}\right)$$

se traduire en ces termes :

« La racine *imaginaire* de l'unité $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, représentée, dans la « sphère de rayon 1, par le rayon dirigé suivant la partie positive « de l'axe des z, équivaut à une *fraction*, exprimée par le nombre « $\left(e^{-\frac{\pi}{2}} = 0{,}208\right)$, de la racine *réelle* $(+1)$ représentée, dans la même « sphère, par le rayon dirigé suivant la partie positive de l'axe « des x. »

soit, sur la figure 14 :..... OC = [OA × 0,208..... = OD].

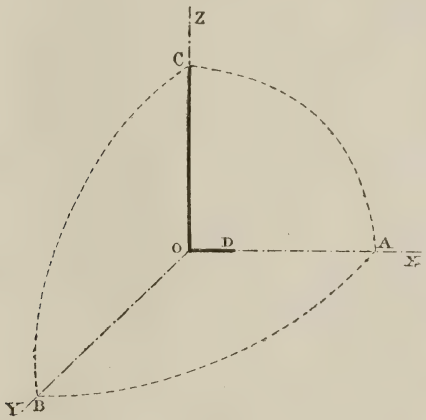


Fig. 14.

Une telle proposition se condamne évidemment d'elle-même, et condamne par suite la relation [E'] qui en est l'expression algébrique.

II. — On arrive encore à la même fausse équivalence [E'] si, pour approprier la relation du n° 18 au cas de l'acception réflexe, on opère sur *l'arc* (second procédé du n° 14) au lieu d'opérer sur la *base d'acception*, comme on l'a fait au n° 20.

Reprenons la relation du n° 18 :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$$

et au lieu de substituer $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ à $\sqrt{-1}$, remplaçons α par $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$ dans les deux membres. — Il viendra :

$$\left[\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}\right] = \left[e^{\frac{\pi}{2}(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'})\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{(1+\alpha')}}\right]$$

Le procédé est naturellement indifférent à l'égard du premier membre. Pour le second membre, il fait particulièrement ressortir avec évidence la perpendicularité du plan de l'arc logarithme au plan de l'acception, et il est d'ailleurs également indifférent tant que α' demeure indéterminé : tant que α' croît à partir de zéro jusqu'à $(1-\delta)$, et ensuite à partir de $(1+\delta)$, si petit qu'on suppose δ, les deux membres conservent le caractère de l'acception réflexe et restent soumis à la même loi de continuité. — Il est d'ailleurs impossible de les traduire arithmétiquement.

Mais, au moment insaisissable de la transition où, pour passer de $(1-\delta)$ à $(1+\delta)$, on pose $\alpha'=1$, le second membre devient tout-à-coup égal à *un nombre* puisqu'à cause de $(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1}=-1)$, on a :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = \left[e^{\frac{\pi}{2}(\alpha\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}\alpha}\right].$$

Et enfin, pour $\alpha=1$, on a ;

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \ldots \qquad [E']$$

Or, la supposition qu'une expression essentiellement *symbolique*, telle que $e^{\frac{\pi}{2}\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)\sqrt{-1}}$, puisse subitement changer de caractère et devenir *numérique* pour une valeur déterminée $(\alpha'=1)$ attribuée à la variable α', ne répugne pas moins à la logique que l'interprétation donnée ci-dessus (I) de l'équivalence [E'] en langage ordinaire.

III. — La fausse équivalence [E'] a encore été critiquée dans les termes suivants, ou à peu près, par M. Vallès (*Des formes imaginaires en Algèbre.* — T. 3, p. 40).

Si on élève $\left(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}\right)$ à la puissance $\sqrt{-1}$, on a :

$$e^{-\frac{\pi}{2}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

En élevant la même égalité à la puissance $(-\sqrt{-1})$, on a :

$$e^{\frac{\pi}{2}} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

D'où $e^{-\frac{\pi}{2}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0$, $\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}} + e^{\frac{\pi}{2}} = 0$, $1 + e^{\pi} = 0$ et enfin :

$e^{\pi} = -1$, résultat manifestement faux.

Remarquons que l'équivalence [E] résiste à cette épreuve.

On a en effet également : $e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, d'où :

$$e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} + e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = 0, \quad e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}} = 0$$

$$\left(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}\right)^2 + 1 = 0.$$

Or, on a bien :

$$\left[\left(e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}\right)^2 = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^2\right] = -1,$$

puisque [n° 2—3°] $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ est une racine carrée de l'unité négative.

22. — Conséquences de la discussion qui précède.

I. *Deux formes, dont une seule admissible, du log. de l'acception réflexe.* — Aux deux figures *exponentielles* de l'acception réflexe,

$$\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha} \text{ et } \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

dont la première met en relief la *base* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ de l'acception, et la seconde, l'*arc* $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ qui la caractérise, correspondent deux formes de son logarithme népérien :

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} \text{ et } \left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}.\sqrt{-1} = \frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{1+\alpha'}\right)$$

Les deux expressions de l'acception sont toujours identiques, quelles que soient les valeurs des variables α et α'.

Les deux expressions du logarithme restent symboliques tant que α' demeure indéterminé.

Mais pour $\alpha' = 1$, la seconde expression du logarithme devient *numérique*, puisqu'on a alors :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}\alpha}, \text{ et pour } \alpha = 1, \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$$

On aurait aussi, pour $\alpha' = 3$;

$$\sqrt{-1}^{-\alpha\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha}, \text{ et pour } \alpha = 1 : \left(\sqrt{-1}^{-\sqrt{-1}} = -\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}}\right.$$

De telles relations ne pouvant exister, par la raison (qui résume tous les développements du n° 21), qu'on ne saurait égaler deux quantités dont les expressions analytiques sont d'*acception différente*, la première forme du logarithme népérien de l'acception réflexe est seule admissible analytiquement.

II. *Deux expressions, conciliables, de l'arc-logarithme de l'acception* $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}$. — Cependant l'arc-logarithme étant toujours

[n° 19] situé dans un plan perpendiculaire à celui de l'acception, il en résulte que l'on doit regarder comme ayant même représentation géométrique les arcs exprimés par :

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}} \quad \text{et par} \quad \frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{(1+\alpha')}$$

qui deviennent respectivement, pour $\alpha' = 1$:

$$\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right).$$

Or cela n'a rien qui ne s'explique par la théorie des acceptions.

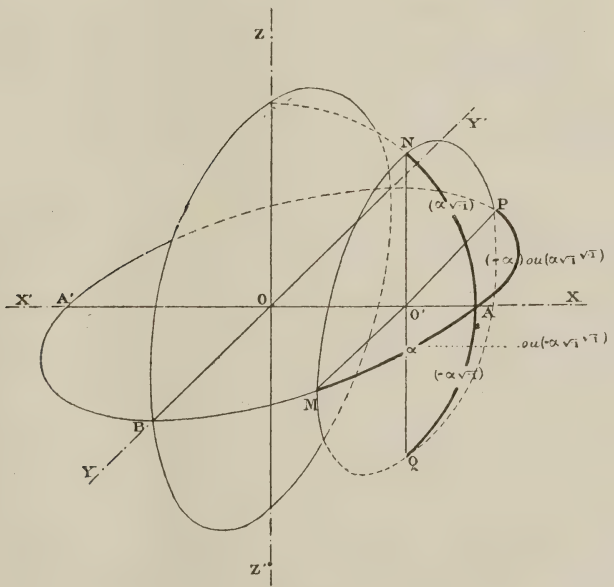


Fig. 15.

Ainsi, l'arc rectifié AM, mesuré à partir de l'origine A des arcs sur la circonférence située dans le plan horizontal, est exprimé par $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$.

L'arc AN, mesuré à partir de la même origine sur la circonfé-

rence située dans le plan des xz, a pour expression : $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\right)$, ce qui signifie que son plan est perpendiculaire à celui de AM.

L'arc AP considéré dans le plan horizontal comme mesuré sur la même circonférence que AM, mais en *sens contraire*, a pour expression $\left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right)$.

Mais le même arc AP peut aussi être considéré comme le résultat d'une rotation de l'arc AM autour de l'axe des x, rotation d'une amplitude de deux angles droits qui aura transporté AM d'abord en AN, et finalement en AP : l'arc AP est donc *doublement perpendiculaire* à $\mathrm{AM} = \frac{\pi}{2}\alpha$, et cette génération de AP est exprimée par le symbole d'acception $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. — Si $\left(\mathrm{AM} = \frac{\pi}{2}\alpha\right)$, passant en AN, est exprimé par $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\right)$, AM passant en AP doit être exprimé par $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$

III. *L'introduction, en analyse, du symbole* $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ *peut exiger une dérogation aux règles ordinaires du calcul algébrique.* — Maintenant, on a constaté qu'en partant du logarithme de l'acception simple $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\right)$, la recherche du logarithme de l'acception réflexe $\left[\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}\right]$ conduit à $\left(\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ quand on opère sur la *base d'acception* et à $\left(-\frac{\pi}{2}\alpha\right)$ quand on opère sur l'*arc*. — Qu'en un mot, là où le premier procédé donne $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, le second donne : $(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = -1)$. — Or cela pouvait être prévu à l'avance.

Il est clair en effet que le symbole *élémentaire* $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ de l'acception réflexe ne peut s'introduire *naturellement* en analyse que comme valeur particulière de la *double* exponentielle $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$, symbole *général* de l'acceptation réflexe, et qu'il ne peut être en-

gendré par des opérations algébriques sur des termes d'acception *simple*.

Mais il peut se faire que de telles opérations doivent, d'après la nature ou la position de la question, aboutir nécessairement à l'introduction du symbole $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ dans les résultats, quoique la double exponentielle n'apparaisse pas dans les données, et cela, sans qu'on se trouve, comme dans le cas de la recherche du logarithme de l'acception réflexe, en présence de deux expressions obtenues par des procédés différents, et entre lesquelles on n'a eu qu'à se décider. — Alors l'introduction du symbole $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ ne pourra évidemment être obtenue qu'au prix d'une *dérogation aux règles ordinaires du calcul algébrique*.

L'auteur de la théorie des acceptions a expliqué comment une telle circonstance peut se produire, et a indiqué la solution en termes singulièrement topiques : nous ne saurions mieux faire que de les reproduire textuellement ici, sauf à les retrouver ultérieurement (chap. VIII, n° 77)comme faisant partie d'une citation plus étendue d'un de ses manuscrits :

23. — Etude de la dérogation prévue ci-dessus (n° 22-III).

« Cependant je fus longtemps troublé et retardé par la persis-
« tance d'une difficulté *qui ne méritait pas d'arrêter un instant le*
« *plus mince écolier*, et qui semblait se jouer de tous mes efforts.
« Pour plus de simplicité, je l'expose sous la forme d'un pro-
« blème :

« Soit à construire par des droites l'expression $(x + y\sqrt{-1})$, x
« étant arbitraire et y étant une certaine fonction de x : comment
« construire quand $y = \varphi(x)$ est de forme $(\mathrm{A}\sqrt{-1})$, de sorte que
« la substitution donne $x + (\mathrm{A}\sqrt{-1})\sqrt{-1}$, ou, d'après la règle algé-
« brique de la multiplication, $x + \mathrm{A}(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}) = (x - \mathrm{A})$?

« Je ne pouvais admettre un tel résultat, d'après lequel y serait,
« comme x, mesuré suivant l'axe des x, tandis que sa représentation
« linéaire devait, *en tous cas*, demeurer perpendiculaire à celle de
« x, d'après la condition générale que lui imposait sa première
« forme $(y\sqrt{-1})$.

« Il m'a fallu je ne sais combien de temps et quelle heureuse « illumination pour me faire remarquer que y devenant $(A\sqrt{-1})$ « devait, *sans cesser d'être perpendiculaire* à x, *devenir également* « *perpendiculaire* à la *représentation première* de y tracée *perpen-* « *diculairement* à x dans le *plan horizontal,* c'est-à-dire que A « devait, en définitive, *être perpendiculaire* au *plan* des xy ou *pa-* « *rallèle* à *l'axe* des z. »

D'où résulte que si, dans l'expression $(x + y\sqrt{-1})$, y devient de forme $A\sqrt{-1}$, le résultat de la substitution: $x + (A\sqrt{-1}).\sqrt{-1}$ devra s'écrire : $x + A\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ au lieu de : $x + A(\sqrt{-1}.\sqrt{-1}) = x - A$, afin de conserver à A l'acception $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ qui lui appartient incontestablement.

De même, bien évidemment, si $y = \varphi(x)$ devient de forme $(A + B\sqrt{-1})$, le résultat de la substitution : $x + (A + B\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ devra s'écrire : $x + A\sqrt{-1} + B\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ au lieu de : $x + A\sqrt{-1} + B(\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}) = x + A\sqrt{-1} - B$.

C'est ce que confirme l'étude de la question envisagée sous un autre aspect.

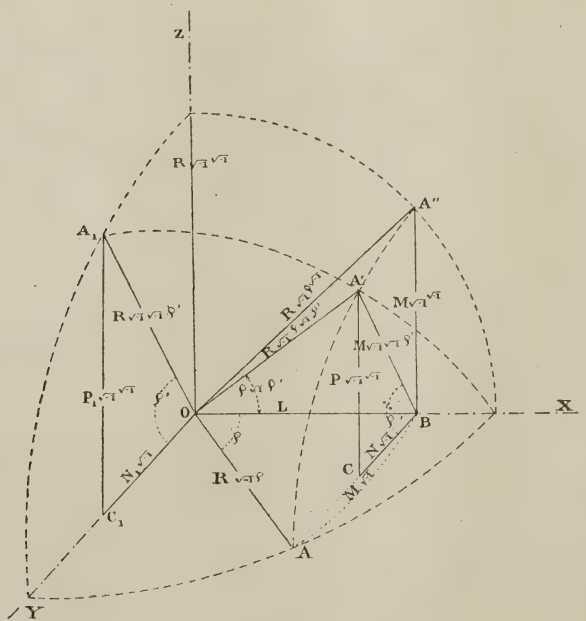


Fig. 16.

Supposons qu'il s'agisse (fig. 16) de passer de l'expression analytique du rayon OA situé dans le plan horizontal, à celle du rayon OA′ situé dans le plan *d'inclinaison donnée* ρ'.

Les composantes de (OA = R) étant (OB = L) et (BA = M) avec l'angle (AOX = ρ), on aura dans le plan horizontal :

$$R\sqrt{-1}^{\rho} = L + M\sqrt{-1} \qquad [1]$$

Les composantes de (OA′ = OA = R) étant (OB = L et (BA′ = BA = M) avec l'angle (A′OX = AOX = ρ) et l'angle (A′BA = ρ'), on aura dans le plan d'inclinaison ρ', en remplaçant d'abord dans [1] la base $\sqrt{-1}$ de l'acception simple par la base $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\rho'}}\right)$ de l'acception réflexe :

$$R\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\rho'}}\right)^{\rho} = L + M\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\rho'}} = L + M\left(\sqrt{-1}\cos\rho' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho'\right) \qquad [2]$$

Abaissons A′C perpendiculaire sur BA, posons BC = N et A′C = P, et, à cause de :

$$N = M\cos\rho', \text{ d'où : } \cos\rho' = \frac{N}{M},$$

et

$$P = M\sin\rho', \text{ d'où : } \sin\rho' = \frac{P}{M},$$

il viendra, en remplaçant dans [2] cos ρ' et sin ρ' par leur valeur :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = L + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \qquad [3]$$

Admettons cependant qu'au lieu de donner l'angle ρ', on ait donné les composantes (BC = N) et (CA′ = P) de BA′ liées, bien entendu, par la relation ($N^2 + P^2 = M^2$), car N et P ne peuvent être indépendants tous deux. On aura pareillement :

$$\cos\rho' = \frac{N}{M}, \quad \text{et } \sin\rho' = \frac{P}{M},$$

et si l'on fait la substitution *correctement*, c'est-à-dire si l'on passe par l'équation [2], on obtiendra de même l'équation [3].

Mais si, dans ce second cas où les données sont N et P, on néglige l'acception *propre* de (BA′ = M) résultante de N et P, et que, sans passer par l'équation [2], on se borne à remplacer, dans [1], M par $(N + P\sqrt{-1})$, la substitution donnera, au lieu du second membre de [3].

$$L + (N + P\sqrt{-1})\sqrt{-1} = L + N\sqrt{-1} + P(\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1)\ldots. [4]$$

Ce *résultat est erroné*, puisque le 3e terme est d'acception $(\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -1)$ au lieu d'être d'acception $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, et *on sait pourquoi* : c'est parce qu'on n'a pas tenu compte de ce que (BA′ = M), résultante de (BC=N) et de (A′C=P), est d'acception réflexe $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{p'}}\right)$. Il n'est pas douteux que la rectification consiste à remplacer le développement [4] par le second membre de l'équation [3], et elle se résout, d'ailleurs, dans le *fait matériel* d'écrire $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ au lieu de $(\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1)$ pour l'acception de P.

Règle pratique ou règle de l'abbé George. — Les acceptions respectives de L, N, P, étant ainsi irrécusablement déterminées, la conclusion suivante, qui sera en même temps une *règle pratique* de calcul, s'impose inévitablement :

« L, M, N, P *étant des modules de même nature, si, dans le* « *binôme* $(L + M\sqrt{-1})$, *on est conduit à substituer à* M *un* « *binôme semblable* $(N + P\sqrt{-1})$, *le développement trinôme* « $[L + (N + P\sqrt{-1})\sqrt{-1}]$ *devra, pour conserver à* P *l'acception* « $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ *qui lui est propre, s'écrire* :

$$L + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

« *au lieu de* :

$$L + N\sqrt{-1} - P$$

« *que donnerait la multiplication algébrique* $(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1} = -1)$. »

Trois cas particuliers. — Signalons trois cas particuliers contenus dans le cas général, et auxquels nous aurons à nous référer plus loin.

A. — *Cas de* $L = 0$, *ou de* $\rho = 1$ *avec* ρ' *quelconque.* — Il correspond au triangle OC_1A_1 de la figure, dans lequel $(OA_1 = R)$ est la résultante de $(OC_1 = N_1)$ et de $(C_1A_1 = P_1)$, triangle qui serait défini par l'équation analytique :

$$R\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\cdot\rho'} = N_1\sqrt{-1} + P_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

dont le second membre serait le résultat rectifié, conformément à la règle formulée ci-dessus, du développement de la substitution de $(N_1 + P_1\sqrt{-1})$ à $(M = R)$ dans $[(L = o) + M\sqrt{-1}]$, c'est-à-dire de :

$$(L = 0) + (N_1 + P_1\sqrt{-1})\sqrt{-1} = N_1\sqrt{-1} + P_1(\sqrt{-1} \times \sqrt{-1})$$

B. — *Cas de* $N = 0$ *ou de* $\rho' = 1$. — Il correspond au triangle OBA″ de la figure dans lequel $(OA'' = R)$ est la résultante de $(OB = L)$ et de $(BA'' = M)$, et qui serait défini par l'équation analytique :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}} = L + M\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \qquad [5]$$

dont le second membre serait le résultat *rectifié*, conformément à la règle formulée ci-dessus, du développement de la substitution de $[(N = 0) + (P = M)\sqrt{-1}]$ à M dans $L + M\sqrt{-1}$, c'est-à-dire de :

$$L + [(N=0) + (P=M)\sqrt{-1}]\sqrt{-1} = L + M(\sqrt{-1}\sqrt{-1})$$

C. *Cas de* $L = 0$, $N = 0$, *ou de* $\rho = 1$ *et* $\rho' = 1$. — Partant du cas précédent (**B**), lorsque, dans le triangle OBA″, l'angle ρ devient égal à 1, en même temps que L devient égal à zéro et M à R. l'équation [5] se réduit à l'identité :

$$R\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = R\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

dont le second membre serait le résultat *rectifié* de la substitution de $[(N = 0) + (P = R)\sqrt{-1}]$ à M dans $[(L = 0) + (M = R)\sqrt{-1}]$ c'est-à-dire de :

$$(L = 0) + [(N = 0) + (P = R)\sqrt{-1}]\sqrt{-1} = 0 + [0 + R\sqrt{-1}]\sqrt{-1} = R\sqrt{-1}\sqrt{-1}$$

24.— Echelonnage multiple du symbole $\sqrt{-1}$. — Si, dans le trinôme $(L + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$ du n° **23**, P à son tour devenait de forme $(Q + S\sqrt{-1})$, on serait conduit, par l'analogie, à écrire, pour le résultat de la substitution :

$$L + N\sqrt{-1} + Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + S\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$$

Mais, il est facile de voir que le nouveau symbole $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ équivaut effectivement à $(+1)$.

Car, en rapprochant des divers modules considérés les coefficients qui les caractérisent, on reconnait que leurs directions sont les suivantes :

L . . . . . L parallèle aux x.

$M\sqrt{-1}$:

- $N\sqrt{-1}$ perpendiculaire à L dans le plan horizontal, N parallèle aux y.
- $P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$:
  - $Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ perperdiculaire à L et à N, Q parallèle aux z.
  - $S\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\sqrt{-1}}$ perpendiculaire à N et à Q, S parallèle aux x.

L'équation définitive devra donc s'écrire :

$$R_1\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}} = L + N\sqrt{-1} + Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + S = (L+S) + N\sqrt{-1} + Q\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

R_1, ρ_1, ρ'_1 ont évidemment des déterminations différentes de R, ρ et ρ' du n° **23**. Ces déterminations seront d'ailleurs les mêmes, soit que l'on compose d'abord L avec N et Q, et leur résultante avec S, soit que l'on compose $(L + S)$ avec N et Q, comme cela doit être d'après la

première proposition concernant la composition des droites [n° 6-I, 1°].

On montrerait de même que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}}$ équivaut à $\sqrt{-1}$, et $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}}}$ à $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$,... etc. En général, à supposer que de tels symboles puissent se produire dans le calcul, le nombre des $\sqrt{-1}$ échelonnés étant k, les valeurs sont ± 1, $\pm\sqrt{-1}$, $\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ suivant que le reste de la division $\frac{k}{3}$ est 0, 1 ou 2.

On reviendra d'ailleurs (chap. VII, n° 71) sur la génération, l'interprétation et la réduction d'une complication diédrale telle que $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}}}$ qui prend la forme $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$ pour $\alpha=\alpha'=\alpha''...=1$.

25. — Principe de la règle du n° 23. — La règle du n° 23 a pour principe *l'appréciation exacte* des *acceptions* respectives des éléments du calcul algébrique.

C'est l'*unique dérogation* aux règles ordinaires de ce calcul qu'il sera nécessaire d'invoquer dans la suite de ce travail. L'occasion de l'appliquer se produira d'ailleurs spontanément, par exemple lorsqu'en géométrie analytique un résultat se présentera sous la forme imaginaire et appellera par conséquent une interprétation, puisque notre thèse (n° 3) est la *négation* même de *l'imaginaire*. Cette interprétation se résoudra en général par une rectification d'acception conformément à la règle du n° 23. Et la même rectification conduira à expliquer divers paradoxes analytiques formulés à l'aide du symbole $\sqrt{-1}$ et qui ne sont guère regardés jusqu'ici que comme de pures curiosités (n°s 42, 57), sans qu'on puisse même essayer de leur attribuer un sens quelconque.

Sans préjudice des développements dans lesquels nous entrerons ultérieurement à cet égard, notamment au chapitre VI, nous croyons à propos de donner dès à présent quelques exemples de l'application de la règle du n° 23.

I. Diagonale du parallélipipède. — Soient OA = a, OB = b,

OC $= c$ les trois côtés d'un parallélipipède rectangle, pris à partir de l'origine sur les trois axes coordonnés.

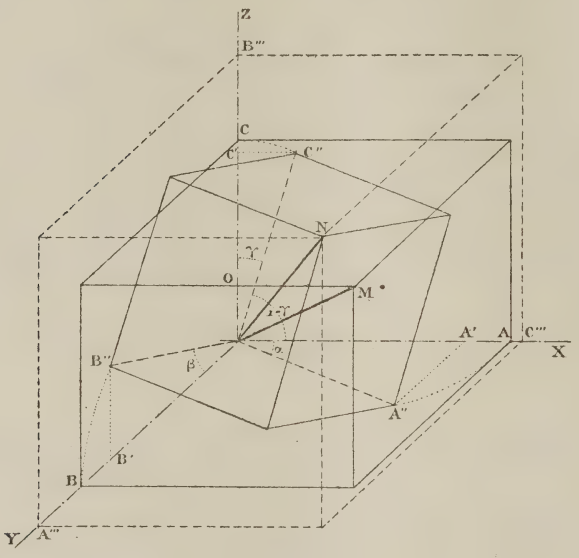


Fig. 17.

La diagonale (OM $=$ R) de ce parallélipipède aura pour expression analytique :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}\rho'} = a + b\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \qquad (1)$$

avec :

$$\text{tg } \rho = \frac{\sqrt{b^2 + c^2}}{a}, \text{ tg } \rho' = \frac{c}{b}, \text{ et } R^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

Supposons que a, b, c deviennent respectivement $(a' + a''\sqrt{-1})$, $(b' + b''\sqrt{-1})$, $(c' + c''\sqrt{-1})$; transportons ces valeurs dans le second membre de (1). Il devient :

$$(a' + a''\sqrt{-1}) + (b' + b''\sqrt{-1})\sqrt{-1} + (c' + c''\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

et si on le développe algébriquement on aura :

$$(a' + a''\sqrt{-1}) + (b'\sqrt{-1} - b'') + (c'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + c''\sqrt{-1}.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$$

ou :

$$(a - b'') + (a'' + b')\sqrt{-1} + c\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + c''\sqrt{-1}.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

résultat impossible à interpréter d'une manière rationnelle.

Mais si on le rectifie conformément à la règle du n° **23** et à l'observation du n° **24**, il deviendra ;

$$(a' + a''\sqrt{-1}) + \left(b'\sqrt{-1} + b''\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right) + \left[c'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + \left(c'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = c''\right)\right]$$

ou, en groupant les termes de même acception :

$$(a' + c'') + (b' + a'')\sqrt{-1} + (c' + b'')\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \ldots (2)$$

résultat parfaitement en harmonie avec la théorie des acceptions, comme on va le vérifier.

Car, ainsi que nous l'avons déjà expliqué, et eu égard aux acceptions relatives de a, b, c, dire que $(OA = a)$ devient $(a' + a''\sqrt{-1})$, cela signifie que OA s'est transporté en OA'' dans le plan des xy, en faisant avec l'axe des x un angle α tel que $OA' = a \cos \alpha$, $A'A'' = a \sin \alpha$, et que l'on a : [n° **11 1°**].

$$(OA'' = a)\sqrt{-1}^{\alpha} = (a \cos \alpha = a') + (a \sin \alpha = a'')\sqrt{-1}$$

Dire que $(OB = b)$ devient $(b' + b''\sqrt{-1})$, cela signifie que OB s'est transporté en OB'' dans le plan des yz, en faisant avec l'axe des y un angle β tel que $OB' = b \cos \beta$, $B'B'' = b \sin \beta$, et que l'on a : [n° **11-3°**]

$$(OB'' = b)\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\beta}} = (b \cos \beta = b')\sqrt{-1} + (b \sin \beta = b'')\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

Dire que $(OC = c)$ devient $(c' + c''\sqrt{-1})$, cela signifie que OC s'est transporté en OC'' dans le plan des zx, en faisant avec l'axe des z un angle γ tel que $OC' = c \cos \gamma$, $C'C'' = c \sin \gamma$, et que l'on a [n° **11-2°**] :

$$(OC'' = c)\sqrt{-1}^{(1-\gamma)\sqrt{-1}} = (c \cos \gamma = c')\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + (c \sin \gamma = c'')$$

La résultante primitive (OM = R) deviendra donc la diagonale (ON = R_1) du parallélipipède oblique construit sur OA″, OB″, OC″ et elle sera donnée par l'équation analytique :

$$(ON = R_1)\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}} = a\sqrt{-1}^{\alpha} + b\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\beta}} + c\sqrt{-1}^{(1-\gamma)\sqrt{-1}}$$

qui peut aussi bien s'écrire, d'après les relations qu'on vient d'établir :

$$(ON=R_1)\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}} = (a'+a''\sqrt{-1}) + \left(b'\sqrt{-1}+b''\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right) + (c'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+c'')$$

ou, en groupant les termes de même acception :

$$(ON = R_1)\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}} = (a' + c'') + (b' + a'')\sqrt{-1} + (c' + b'')\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \quad \ldots (3)$$

On voit que le second membre de l'équation (3) est identique avec (2), c'est-à-dire avec le second membre de (1) transformé par application de la règle du n° **23**.

On voit enfin que, d'après cette dernière forme de son expression analytique, la résultante (ON = R_1) est aussi bien, comme le confirme d'ailleurs la figure, la diagonale du parallélipipède rectangle dont les trois côtés parallèles aux axes seraient respectivement :

$$(a' + c'') \quad , \quad (b' + a'') \qquad \text{et } (c' + b'')$$

II. Rectification de la fausse équivalence (E′). — On a vu [n^os^ **20** et **21**] que la fausse équivalence déduite à tort de la formule d'Euler,

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{-\frac{\pi}{2}} \qquad \ldots (E')$$

doit être remplacée par :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} \qquad \ldots (E)$$

On arrive à la même conséquence par application de la règle du n° 23, en partant de la relation établie au n° 18 :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}},$$

et en considérant que l'opération qui consiste à « *élever les deux membres à la puissance* $\sqrt{-1}$ » en procédant conformément à la règle algébrique des exposants [n° 21-I] doit aboutir au même résultat que la substitution de $(\alpha\sqrt{-1})$ à (α) dans les deux membres [n° 21-II], puisqu'on a algébriquement :

$$\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}\sqrt{-1}}\right) = \left(\sqrt{-1}^{(\alpha\sqrt{-1})} = e^{\frac{\pi}{2}(\alpha\sqrt{-1})\sqrt{-1}}\right)$$

Mais, en se plaçant au second point de vue, on remarque que, dans $e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$, le facteur $(\alpha\sqrt{-1})$ de l'exposant est égal à $(0 + \alpha\sqrt{-1})$, ou de forme $(L + M\sqrt{-1})$ avec $L = 0$.

Il s'agit de remplacer α ou M, dans ce facteur, par $(\alpha\sqrt{-1} = 0 + \alpha\sqrt{-1})$ qui est de forme $(N + P\sqrt{-1})$ avec $N = 0$.

On se trouve donc dans le cas particulier **C** du n° 23, c'est-à-dire que le résultat de la substitution :

$$[0 + (0 + \alpha\sqrt{-1})\sqrt{-1})] = \alpha\sqrt{-1}\sqrt{-1} = -\alpha$$

devra être rectifié par :

$$\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

26. — Autre déduction erronée de la formule d'Euler. — Fausse expression trigonométrique de l'Exponentielle. Sa rectification. — La fausse équivalence (E') du n° 21 n'est pas la seule déduction erronée qu'on ait tirée de la formule d'Euler, toujours par la même substitution vicieuse d'un arc imaginaire à un arc réel.

Dans les deux membres de l'équation :

$$e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha \ldots\ldots \quad (1)$$

on remplace α par $(-\alpha\sqrt{-1})$, ce qui donne d'abord :

$$e^{\frac{\pi}{2}(-\alpha\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = \cos(-\alpha\sqrt{-1}) + \sqrt{-1}\sin(-\alpha\sqrt{-1})$$

Puis, effectuant la multiplication ($\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1$) dans l'exposant du premier membre, et admettant que l'on a :

$$\cos(-\alpha\sqrt{-1}) = \cos(\alpha\sqrt{-1}), \text{ et } \sin(-\alpha\sqrt{-1}) = -\sin(\alpha\sqrt{-1})$$

comme s'il s'agissait de $\cos \pm \alpha$, et $\sin \pm \alpha$, on écrit finalement :

$$e^{\frac{\pi}{2}\alpha} = \cos(\alpha\sqrt{-1}) - \sqrt{-1}\sin(\alpha\sqrt{-1}) \ldots\ldots \quad (2)$$

et cette formule figure dans les Traités d'Analyse comme « *l'expression trigonométrique de l'exponentielle.* »

Or, en premier lieu, on a vu au n° 15 que l'on a :

$$\cos(\pm\alpha\sqrt{-1}) = \cos\alpha, \text{ et } \sin(\pm\alpha\sqrt{-1}) = \pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha.$$

En second lieu, on a vu [n^{os} **20**, **21** et **22**], que quand α se change en $(\pm\alpha\sqrt{-1})$, l'expression $e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}$ devient :

$$e^{\pm\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}.$$

La véritable transformation de (1) doit donc être, au lieu de (2) :

$$e^{\pm\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = \cos\alpha \pm \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha \ldots\ldots\ldots \quad (2^{bis})$$

Elle s'obtient directement en remplaçant, dans (1), $\sqrt{-1}$ par $\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, c'est à dire en opérant sur la base d'acception au lieu d'opérer sur l'arc.

L'équation (2^{bis}) équivaut d'ailleurs à :

$$\sqrt{-1}^{\pm\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha \pm \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin\alpha \ldots\ldots\ldots \text{[forme } f_2 \text{ du n° 11]},$$

comme cela doit être.

27. — Valeurs exactes de sin α et de cos α, déduites de la formule d'Euler. — Il n'y a au contraire, rien à redire aux valeurs de sin α et cosα déduites suivant l'usage, de la formule d'Euler.

En changeant $\sqrt{-1}$ en $(-\sqrt{-1})$ dans la relation :

$$e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

on obtient :

$$e^{-\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \cos\alpha - \sqrt{-1}\sin\alpha,$$

d'où résultent par voie d'addition et de soustraction les formules connues :

$$\cos\alpha = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} + e^{-\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin\alpha = \frac{e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

Leur interprétation concrète. — Cependant, on n'a vu longtemps, dans ces formules, que des symboles dont on ne donnait aucune interprétation concrète.

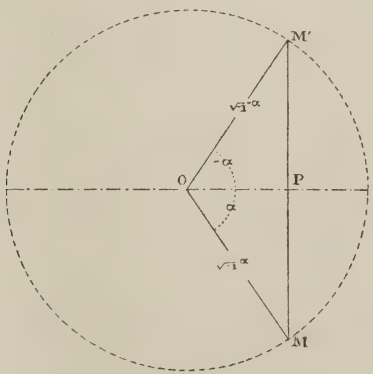


Fig. 18.

$\pm\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}$ $\pm\alpha$

En y remplaçant e par $\sqrt{-1}$, on les lit couramment sur la figure, en faisant attention que PM′=PM.

$$\cos\alpha=\frac{\sqrt{-1}^{\alpha}+\sqrt{-1}^{-\alpha}}{2}=\frac{(\mathrm{OP}+\mathrm{PM}\sqrt{-1})+(\mathrm{OP}-\mathrm{PM}'\sqrt{-1})}{2}=\frac{2\mathrm{OP}}{2}=\mathrm{OP}$$

$$\sin\alpha=\frac{\sqrt{-1}^{\alpha}-\sqrt{-1}^{-\alpha}}{2\sqrt{-1}}=\frac{(\mathrm{OP}+\mathrm{PM}\sqrt{-1})-(\mathrm{OP}-\mathrm{PM}'\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{2\mathrm{PM}\sqrt{-1}}{2\sqrt{-1}}=\mathrm{PM}$$

Cette interprétation est d'ailleurs connue aujourd'hui : on la trouve notamment dans l'ouvrage de M. Laisant (*Théorie et application des Equipollences*, 1887, n° 42, p. 38-39).

28. — Transformation erronée de ces valeurs par Cauchy. — Mais la transformation que Cauchy fait subir à ces formules (*Exercices d'analyse et de physique mathématique*. T. 4, p. 272) est erronée.

La citation suivante suppose des arcs rectifiés, c'est-à-dire exprimés en fonction du rayon pris pour unité.

« Dans le premier membre des équations :

$$e^{\alpha\sqrt{-1}}=\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha,\quad e^{-\alpha\sqrt{-1}}=\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha,$$

« posons $\alpha=x+y\sqrt{-1}$.

« Alors, en ayant égard aux formules :

$$e^{\alpha\sqrt{-1}}=e^{x\sqrt{-1}-y}=e^{-y}\left(\cos x+\sqrt{-1}\sin x\right)$$
$$e^{-\alpha\sqrt{-1}}=e^{-x\sqrt{-1}+y}=e^{y}\left(\cos x-\sqrt{-1}\sin x\right)$$

« d'où :

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha=e^{-y}\cos x+e^{-y}\sqrt{-1}\sin x$$
$$\cos\alpha-\sqrt{-1}\sin\alpha=e^{y}\cos x-e^{y}\sqrt{-1}\sin x$$

« on trouve :

$$\cos\alpha=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\cos x-\sqrt{-1}\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\sin x$$

« et

$$\sin\alpha = \frac{e^{y}+e^{-y}}{2}\sin x + \sqrt{-1}\,\frac{e^{y}-e^{-y}}{2}\cos x$$

« Soit $\alpha' = x - y\sqrt{-1}$, la quantité conjuguée de α.

« Pour obtenir $\sin\alpha'$ et $\cos\alpha'$, il suffira de changer dans le pre-
« mier membre de ces formules le signe de y ou, ce qui revient
« au même, le signe de $\sqrt{-1}$.

« Ces dernières formules mettent en évidence dans $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$,
« la partie algébrique et le coefficient de $\sqrt{-1}$. »

D'après la règle du n° **23**, si dans $e^{\alpha\sqrt{-1}}$ et dans $e^{-\alpha\sqrt{-1}}$, on remplace α par $x+y\sqrt{-1}$, on devra écrire :

$$e^{\alpha\sqrt{-1}} = e^{(x\pm y\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{x\sqrt{-1}\pm y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = e^{x\sqrt{-1}} \times e^{\pm y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$$

$$e^{-\alpha\sqrt{-1}} = e^{-(x\pm y\sqrt{-1})\sqrt{-1}} = e^{-x\sqrt{-1}\mp y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = e^{-x\sqrt{-1}} \times e^{\mp y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$$

de sorte que les symboles imaginaires subsistent dans les deux termes du second membre de ces formules.

On ne saurait, sous cette forme, en donner une interprétation concrète.

Mais si on substitue aux exponentielles de base e les coefficients de direction, au moyen de l'équivalence du N° 18, il vient :

$$\sqrt{-1}^{\frac{2\alpha}{\pi}} = \sqrt{-1}^{\frac{2x}{\pi}} \times \sqrt{-1}^{\pm\frac{2y}{\pi}\sqrt{-1}}$$

$$\sqrt{-1}^{-\frac{2\alpha}{\pi}} = \sqrt{-1}^{-\frac{2x}{\pi}} \times \sqrt{-1}^{\mp\frac{2y}{\pi}\sqrt{-1}}$$

ou, plus simplement, pour en revenir à la notation la plus commode, en supposant α, x et y exprimés en fonction du quadrant :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} = \sqrt{-1}^{x} \times \sqrt{-1}^{\pm y\sqrt{-1}} \quad , \quad \sqrt{-1}^{-\alpha} = \sqrt{-1}^{-x} \times \sqrt{-1}^{\mp y\sqrt{-1}}$$

Admettant que x et y soient donnés, ce qui détermine les coef-

ficients de direction $\sqrt{-1}^{\mp x}$, $\sqrt{-1}^{\pm y\sqrt{-1}}$, il résulte de ces équations que leur produit serait également un coefficient de direction $\sqrt{-1}^{\pm\alpha}$, et il s'agirait de déterminer la quantité α qui le caractérise.

On verra, dans le chapitre suivant, la confirmation de cette conclusion en ce qui touche la nature du produit. On verra en outre que α doit être de forme $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$, et quels rapports doivent exister entre $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$, x et $y\sqrt{-1}$.

29. — Interprétation des expressions où $\sqrt{-1}$ figure en exposant. — On a vu (n° 18) que l'acception *simple* a deux expressions équivalentes, l'une *exponentielle* et l'autre *logarithmique*, toutes deux d'ailleurs ayant le même développement trigonométrique.

$$\left[\sqrt{-1}^{\alpha} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}}\right] = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha$$

On a vu (n° 20) qu'il en est de même de l'acception *réflexe* :

$$\left[\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}}\right] = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'$$

Ces rapprochements permettent, comme on va le montrer, d'interpréter les expressions dans lesquelles $\sqrt{-1}$ figure en exposant, soit isolé, soit comme élément d'une combinaison donnée.

Algébriquement, l'élévation « *à la puissance* $\sqrt{-1}$ » d'une quantité quelconque est une opération qui ne présente aucun sens. — m étant une quantité réelle, on ne saurait dire ce que c'est que $\left(m^{\sqrt{-1}}\right)$. Quant à :

$$\left(m^{\sqrt{-1}}\right)^{\sqrt{-1}} = m^{\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}} = m^{-1} = \frac{1}{m} \quad ,$$

on peut l'écrire, mais non pas, bien certainement, en être convaincu.

1° Cependant, à cause de $m = e^{lm}$, d'où $m^{\sqrt{-1}} = e^{lm\sqrt{-1}}$, il suffit de poser :

$$lm = \frac{\pi}{2}\alpha, \text{ d'où } \alpha = \frac{2lm}{\pi}$$

pour avoir :

$$m^{\sqrt{-1}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha}\right) = \sqrt{-1}^{\frac{2lm}{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Ainsi $(m^{\sqrt{-1}})$ est une acception *simple* représentée par le rayon situé dans le plan horizontal et faisant avec l'axe des x un angle $\left(\alpha = \frac{2lm}{\pi}\right)$.

2° On aura de même :

$$m'^{\sqrt{-1}} = \left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha'\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha'}\right) = \sqrt{-1}^{\frac{2lm'}{\pi}}$$

et par conséquent :

$$(m^{\sqrt{-1}})^{(m'^{\sqrt{-1}})} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{\frac{2lm}{\pi}\sqrt{-1}^{\frac{2lm'}{\pi}}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

c'est-à-dire que $\left(m^{\sqrt{-1}}.m'^{\sqrt{-1}}\right)$ est une acception *réflexe* représentée par le rayon situé dans le plan d'inclinaison $\left(\alpha' = \frac{2lm'}{\pi}\right)$ et faisant avec l'axe des x un angle $\left(\alpha = \frac{2lm}{\pi}\right)$.

3° Pour l'expression $(m^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}}$, il suffit de remplacer $(m^{\sqrt{-1}})$ par son équivalent [1] pour écrire :

$$(m^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\left(\alpha = \frac{2lm}{\pi}\right)\sqrt{-1}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

On voit que [3] n'est autre chose que [2] avec $\alpha' = 1$, c'est-à-dire que $(m^{\sqrt{-1}})^{\sqrt{-1}}$ est une acception *réflexe* représentée par le

rayon situé dans le plan vertical des xz, et faisant avec l'axe des x un angle $\left(\alpha = \frac{2lm}{\pi}\right)$.

On a en même temps $\frac{2lm'}{\pi} = 1$, d'où $lm' = \frac{\pi}{2}$ et $m' = e^{\frac{\pi}{2}}$.

4° Soit proposée l'expression $m^{\sqrt{-1}^{\alpha}}$. On aura algébriquement:

$$m^{\sqrt{-1}^{\alpha}} = m^{(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha)} = m^{\cos\alpha} \times m^{\sqrt{-1}\sin\alpha} = m^{\cos\alpha} \times e^{lm\sin\alpha\times\sqrt{-1}}$$

Posant $\sin\alpha\ lm = \frac{\pi}{2}\alpha_1$, d'où $\alpha_1 = \frac{2\sin\alpha lm}{\pi}$

on aura :

$$m^{\sqrt{-1}^{\alpha}} = m^{\cos\alpha} \times \left(e^{\frac{\pi}{2}\alpha_1\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha_1}\right) \ldots\ (4)$$

Ainsi $m^{\sqrt{-1}^{\alpha}}$ est une *quantité* d'acception *simple* représentée, dans le plan horizontal, par une droite de longueur $\left(m^{\cos\alpha}\right)$ faisant avec l'axe des x un angle $\alpha_1 = \frac{2\sin\alpha lm}{\pi}$.

5° Soit proposée l'expression $m^{\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}}$. On aura algébriquement :

$$m^{\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}} = m^{(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha')}$$

$$= m^{\cos\alpha} \times m^{\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha'} \times m^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'}$$

$$= m^{\cos\alpha} \times e^{lm.\sin\alpha\cos\alpha'\sqrt{-1}} \times e^{lm.\sin\alpha\sin\alpha'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$$

ou, en posant : $lm.\sin\alpha\cos\alpha' = \frac{\pi}{2}\alpha''$, et $lm.\sin\alpha\sin\alpha' = \frac{\pi}{2}\alpha'''$, d'où $\alpha'' = \frac{2lm.\sin\alpha\cos\alpha'}{\pi}$, et $\alpha''' = \frac{2lm.\sin\alpha\sin\alpha'}{\pi}$

on aura :

$$m^{\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}} = m^{\cos\alpha} \times e^{\frac{\pi}{2}\alpha''\sqrt{-1}} \times e^{\frac{\pi}{2}\alpha'''\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$$

$$= m^{\cos\alpha} \times \sqrt{-1}^{\alpha''} \times \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha'''}$$

Le premier facteur du second membre est un *module*.

Le second est une acception *simple*, et le troisième une acception *réflexe*.

Or, on verra au chapitre suivant (n° 36) que le produit du second et du troisième facteur se résout en un seul facteur qui est une acception réflexe, c'est-à-dire qu'en posant :

$$\sqrt{-1}^{\alpha''} \times \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha'''} = \sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$$

on déterminera ρ et ρ' en fonction de α'' et α''' d'après les procédés de calcul qui seront exposés. — On a donc finalement :

$$m^{\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}} = m^{\cos\alpha} \times \sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$$

Ainsi $m^{\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est une *quantité* d'acception *réflexe* représentée par une droite de longueur $(m^{\cos\alpha})$ faisant avec l'axe des x un angle ρ, et située dans un plan incliné de ρ' sur le plan horizontal.

On verra (n^{os} 72 et suivants) comment ces indications servent à interpréter des expressions plus compliquées.

CHAPITRE IV

Calcul des expressions analytiques des quantités considérées comme éléments de produits. — Composition des arcs. — Conclusion des quatre premiers chapitres.

---

30. — Le produit des expressions analytiques de plusieurs droites est, comme leur somme, l'expression analytique d'une droite.

31. — Cas de facteurs de même réflexité.

32. — Cas de *deux* facteurs *orthogonaux*, l'*un* d'acception *simple*. — Nouvelle expression analytique d'une droite, en fonction de la *longitude* et de la *latitude* de son extrémité, ou *seconde forme* de l'acception *réflexe*.

33. — Equivalence de $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

34. — Règle de calcul résultant de cette équivalence.

35. — Rapprochement des deux *formes* des coefficients de direction.

Conséquences. — I. Formules de transition entre les deux formes.

II. Equation analytique du triangle sphérique rectangle.

III. Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

36. — Cas de deux facteurs *non* orthogonaux, l'*un* d'acception *simple*.

37. — Cas de *deux* facteurs d'*acception réflexe*. — Procédé général de calcul. — *Double produit, variable* avec l'*ordre* de la multiplication.

38. — Introduction d'un troisième facteur.

39. — Cas d'un *nombre quelconque* de facteurs de réflexité différente. — Polygones sphériques. — Composition des *arcs* non-coplanaires. — Variation du produit, ou de la résultante de la composition, suivant l'ordre d'introduction des facteurs, ou des arcs.

40. — Les relations établies sous la forme d'équations entre l'expression du produit de facteurs de réflexité différente et l'indication de la multiplication des expressions analytiques des facteurs ne peuvent être traitées comme des équations algébriques *ordinaires*. — Confirmation par divers exemples : I. Relation établie au n° 30 ; — II. Relation établie au n° 32 ; — III. Relation initiale du n° 37, et nécessité du procédé du n° 37.

41. — Equation *symbolique* des produits de facteurs de réflexités différentes. — Equation *symbolique* de la composition des arcs.

42. — Solution d'un paradoxe analytique.

43. — Cas où les facteurs se présentent sous la 2e forme $\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)$

44. — Conclusion des 4 premiers chapitres.

30. — Nature du produit des expressions analytiques de plusieurs droites.

Le produit des expressions analytiques de *deux* ou *plusieurs droites* est, aussi bien que leur *somme* [n° 7], *l'expression analytique* d'une *droite*.

Car la *nature* de ce produit ne peut évidemment dépendre de la *valeur absolue* de ses facteurs : il suffit donc de l'établir pour un cas particulier quel qu'il soit.

Or, nous avons vu [n° 4] que les n rayons équidistants qui représentent, dans le plan horizontal, les n racines n^{es} *simples* de l'unité, ont pour expression générale $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{n}} = \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^k$. — Et si l'on suppose $k = k' + k'' + k'''\ldots$, on aura :

$$\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^k = \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{(k'+k''+k''')} = \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{k'} \times \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{k''} \times \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{k'''} \times \ldots.$$

La proposition énoncée ci-dessus est donc vérifiée. Elle se traduirait algébriquement, dans le cas le plus général, par l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \times B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} \times C\ldots$$

ou :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = A.B.C.. \times \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'} + \beta\sqrt{-1}^{\beta'} + \gamma\ldots}$$

Il est clair qu'on devra avoir séparément :

$$R = A.B.C..., \text{ et } \sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'} + \beta\sqrt{-1}^{\beta'} + \ldots)}$$

La valeur linéaire du *produit* ABC, lequel comprend d'ailleurs les formes particulières $\frac{A}{B}$, A^n, $A^{\frac{1}{n}}$, correspondant aux cas du *quotient*, des *puissances* et des *racines*, déterminera par rapport au rayon 1, le rayon de la sphère dans laquelle la droite R doit être inscrite sous la direction : $\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$. — On sait d'ailleurs construire *graphiquement* une ligne égale au *produit* de plusieurs lignes, au *quotient* de deux lignes, aux *puissances* et (approximativement du moins) aux *racines* d'une ligne. On juge inutile de rappeler ici les procédés exposés dans les ouvrages connus (M^ce^ Lévy, Vallès...)

dont on pourra faire usage si on veut construire la ligne R au lieu de la calculer.

Cela dit, on fera, dans tout ce qui suit, abstraction des *modules*, et on ne s'occupera que des produits des *coefficients de direction* ou *acceptions*, en supposant toujours le rayon égal à l'unité.

On va examiner successivement les divers cas qui peuvent se présenter, dans l'ordre de leur complication.

31. — Produit de facteurs de même réflexité. — Le plus simple est évidemment celui où tous les facteurs sont de *même réflexité*, c'est-à-dire où tous les rayons qui les représentent sont situés dans un même plan passant par l'axe des x. — Le produit sera aussi de même réflexité, car il ne saurait dépendre de l'inclinaison du plan considéré, dans lequel toutes choses doivent se passer comme si ce plan était horizontal. — La question est donc ramenée au cas où tous les facteurs sont d'acception *simple*.

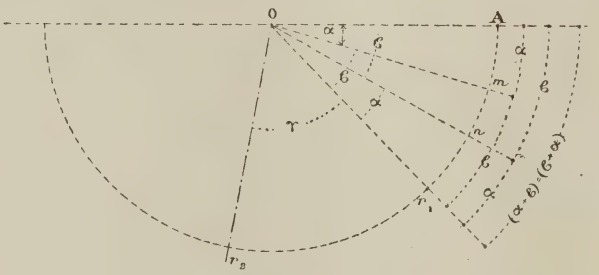


Fig. 19.

La figure montre que si $Om = \sqrt{-1}^{\alpha}$ et $On = \sqrt{-1}^{\beta}$, on aura à la fois :

$Or_1 = \sqrt{-1}^{\rho_1} = \sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{\beta} = \sqrt{-1}^{\alpha+\beta} = \sqrt{-1}^{\beta+\alpha}$, en même temps que $\rho_1 = \alpha+\beta = \beta+\alpha$, c'est-a-dire que le produit est indépendant de l'ordre des facteurs.

Si on introduit un nouveau facteur $\sqrt{-1}^{\gamma}$, on aura :

$Or_2 = \sqrt{-1}^{\rho_2} = \sqrt{-1}^{\alpha+\beta} \times \sqrt{-1}^{\gamma} = \sqrt{-1}^{\alpha+\beta+\gamma}$, en même temps que $\rho_2 = \alpha+\beta+\gamma$.

Ainsi, l'introduction d'un nouveau facteur *entraîne* le rayon pré-

cédent d'une *quantité angulaire* mesurée par l'arc qui caractérise ce facteur, dans le sens indiqué par le signe de cet arc.

Car supposons qu'arrivé au rayon $Or_2 = \sqrt{-1}^{\rho_2}$, on ait à introduire un facteur $\sqrt{-1}^{-\gamma}$, on reviendra sur le rayon Or_1. En effet :

$$\text{de } \sqrt{-1}^{\rho_2} = \sqrt{-1}^{\alpha+\beta} \times \sqrt{-1}^{\gamma}, \text{ on déduit } \frac{\sqrt{-1}^{\rho_2}}{\sqrt{-1}^{\gamma}} = \sqrt{-1}^{\rho_2-\gamma} = \sqrt{-1}^{\alpha+\beta}$$

Le cas considéré comprend les puissances et les racines. — Car si tous les facteurs sont égaux à $\sqrt{-1}^{\alpha}$ et que leur nombre soit k, on a : $(\sqrt{-1}^{\alpha})^k = \sqrt{-1}^{k\alpha}$, d'où l'on tire :

$$\sqrt[k]{\sqrt{-1}^{k\alpha}} = \sqrt{-1}^{\alpha}, \text{ ou changeant } \alpha \text{ en } \frac{\alpha}{k}, \sqrt[k]{\sqrt{-1}^{\alpha}} = \sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{k}}$$

Il résulte de là que le produit des expressions analytiques des *acceptions* de *même réflexité* est un produit essentiellement *algébrique*, *indépendant* de l'ordre des *facteurs* et dont l'expression la plus générale serait, en faisant toujours abstraction des modules :

$$\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \times \sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\alpha'}} \times \ldots = \sqrt{-1}^{(\alpha+\beta+\gamma\ldots)\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

à laquelle correspond l'équation entre les exposants :

$$\rho\sqrt{-1}^{\alpha'} = (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)\sqrt{-1}^{\alpha'}$$

d'où suit, comme on l'a déjà remarqué, que l'inclinaison α' est sans influence sur la détermination de ρ, puisque le facteur $\sqrt{-1}^{\alpha'}$ est commun.

L'équation $\rho = (\alpha+\beta+\gamma+\ldots)$ représente la relation entre les arcs qui caractérisent le produit et chacun de ses facteurs. — C'est une *somme algébrique* proprement dite, d'arcs mesurés sur la même circonférence de rayon 1.

La forme de cette équation est d'ailleurs absolument identique avec celle de la composition des droites de même acception.

$$R\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = (A+B+C+\ldots)\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

qui se réduit, par la suppression du facteur commun, à :

$$R = A+B+C+... \qquad [N^\circ\ 6\text{-I. } 2^o]$$

On verra plus loin [N° 37] que les produits d'*acceptions* de *réflexité différente* se distinguent d'une manière essentielle de ceux des *acceptions* de *même réflexité*, et on comprendra pourquoi nous avons autant insisté ici, en ce qui concerne ces derniers, sur des remarques qui, au premier abord, paraîtront peut-être superflues.

32. — Produit de deux facteurs orthogonaux, dont l'un d'acception simple.

Passant aux produits de facteurs de réflexité différente, et d'abord au produit de deux facteurs seulement, considérons en premier lieu le cas de deux facteurs orthogonaux dont l'un d'acception simple, respectivement représentés (fig. 20) par OQ et Om, et ayant pour expressions analytiques :

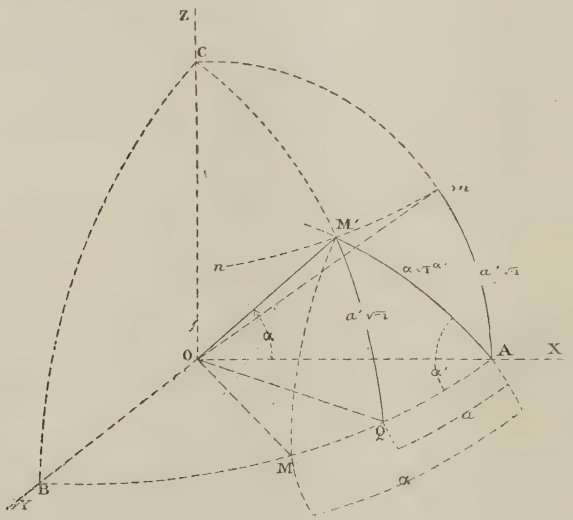


Fig. 20.

$$OQ = (\sqrt{-1}^{a} = \cos a + \sqrt{-1}\sin a) \;;\; Om = (\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}} = \cos a' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin a')$$

Le produit de ces deux facteurs pourra s'écrire :

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}} = (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)\cos a' + \sqrt{-1}^{a}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin a'$$

ou :

$$\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}} = \cos a \cos a' + \sqrt{-1} \sin a \cos a' + \sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} \sin a' \ldots (1)$$

Nouvelle expression analytique d'une droite en fonction de la longitude et de la latitude de son extrémité; ou seconde forme de l'acception réflexe. — Remarquons que les angles mesurés par les arcs AQ = a et Am = $a'\sqrt{-1}$ sont ce qu'on appellerait en géographie la *longitude* et la *latitude* du point M′ situé à la rencontre du méridien passant par Q avec le parallèle passant par m.

Or, les coordonnées x, y, z du point M′ exprimées en fonction des inclinaisons diédrales α et α', ont respectivement pour valeur [N° 8], en supposant le rayon égal à l'unité.

$$x = \cos \alpha, \qquad y = \sin \alpha \cos \alpha' \qquad z = \sin \alpha \sin \alpha'$$

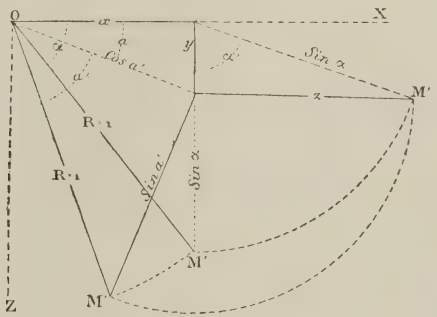


Fig. 21.

Mais la figure 21 représentant les divers rabattements du point M′ sur le plan horizontal, fait voir que ces mêmes coordonnées peuvent être également exprimées en fonction de la longitude a et de la latitude a' du point M′, c'est-à-dire qu'on a aussi :

$$x = \cos a. \cos a', \qquad y = \sin a. \cos a', \qquad z = \sin a'$$

De sorte que l'équation de la direction OM′, qui équivaut [N° 8] à :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

peut encore s'écrire :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos a \cos a' + \sqrt{-1} \sin a \cos a' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' \quad (2)$$

Maintenant, il résulte du rapprochement des équations [1] et [2] que les deux coordonnées x et y de l'extrémité M′ de la direction $OM' = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ sont les mêmes que les deux coordonnées x et y de l'extrémité de la direction $(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}})$. — Ces deux directions se terminant, l'une comme l'autre, à la surface de la sphère de rayon 1, la 3e coordonnée est nécessairement la même de part et d'autre. — En un mot, la direction $(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}})$ n'est autre que OM′, ou, en d'autres termes, le produit des deux directions OQ et Om est précisément la direction OM′, ce qui s'exprimerait analytiquement en écrivant :

$$\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Les arcs qui entrent dans cette équation sont d'ailleurs liés par la condition que $AQ = a$ est le côté horizontal, $QM' = a'\sqrt{-1}$ le côté vertical, $AM' = \alpha\ \sqrt{-1}^{\alpha'}$ l'hypoténuse, et enfin α' l'angle opposé au côté $(a'\ \sqrt{-1})$ dans le triangle sphérique AQM′ rectangle en Q.

33. — Equivalence de $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}}$ et de $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$. — Reste pourtant à faire une remarque importante.

L'équation [1] du n° précédent, qui représente la même direction que [2], en diffère en ce que le dernier terme du second membre est $(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} \sin a')$ au lieu de $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a')$.

Il faut donc en conclure que $(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}})$ équivaut à $(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$. — Voici comment on se rend compte géométriquement de cette équivalence.

Remarquons que l'expression $(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}})$ n'est autre chose que la valeur de $(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}})$, ou de l'expression générale de la direction pour $a' = 1$.

Or si, dans l'expression $(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}})$, on fait varier a, tandis que a' demeure constant, le point M′ (fig. 20) extrémité du rayon OM′, prend toutes les situations possibles sur le parallèle (m M′ n). — Le rayon OM′ représente successivement toutes les génératrices du cône de sommet O, à axe vertical, et ayant ce parallèle pour base.

Mais, à mesure que a' va en croissant de 0 à 1, le diamètre du parallèle diminue, ainsi que l'angle au sommet du cône, [2 (M′OC $= 1 - a'$)]. — Enfin, pour $a' = 1$, le diamètre du parallèle devient nul en même temps que l'angle au sommet du cône, et le cône se réduit au rayon vertical OC $= \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, le tout *quel que soit* a. — En un mot, on arrive au *pôle géographique* par tous les *méridiens*: c'est la traduction, en langage vulgaire, de l'équivalence $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$

On reconnaît du reste que le second membre de l'équation [2] se réduit également à $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ pour $a' = 1$, quel que soit a : ce qui se traduirait encore de même.

34. — Règle de calcul résultant de cette équivalence. — L'équivalence des deux expressions $(\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}})$ et $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$, est donc justifiée. Il importe de ne pas la perdre de vue, autant pour en tenir compte que pour en tirer parti dans tous les cas d'opérations analogues à la recherche du produit de $\sqrt{-1}^{a}$ par $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a'$.

Remarquons d'abord qu'il faudrait bien se garder d'opérer séparément sur chacun des termes du facteur $(\sqrt{-1}^{a} = \cos a + \sqrt{-1} \sin a)$, car on aurait ainsi :

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \cos a \sin a' +$$
$$+\left(\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{1+\sqrt{-1}}\right) \sin a. \sin a'$$

ou, à cause de $\left(\sqrt{-1}^{1+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, d'après ce qu'on vient de voir au N° 33 :

$$(\cos a + \sqrt{-1} \sin a)\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' (\cos a + \sin a)$$

c'est-à-dire le même résultat que si on avait eu à multiplier $(\cos a + \sin a)$, au lieu de $(\cos a + \sqrt{-1}\sin a)$, par $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\sin a'}$. — L'acception propre de sin a aurait disparu.

Voici comment on devra procéder, dans le cas où l'on aura à multiplier par $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ un binôme de forme $M+N\sqrt{-1}$.

On écrira :

$$M + N\sqrt{-1} = \sqrt{M^2+N^2}\left(\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}} + \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}}\sqrt{-1}\right)$$

puis, posant $\frac{N}{M} = \operatorname{tg}\varphi$, d'où :

$$\frac{M}{\sqrt{M^2+N^2}} = \cos\varphi\,, \qquad \frac{N}{\sqrt{M^2+N^2}} = \sin\varphi$$

on aura :

$$M + N\sqrt{-1} = \sqrt{M^2+N^2}\,(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi = \sqrt{-1}^{\varphi})$$

et il viendra :

$$(M + N\sqrt{-1})\,\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{M^2+N^2}\,(\sqrt{-1}^{\varphi}.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\varphi+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}),$$

soit en définitive :

$$(M+N\sqrt{-1}).\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{M^2+N^2}.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

Si M était nul, la transformation cesserait d'être nécessaire, bien évidemment.

35.—Rapprochement des deux formes des coefficients de direction. — Nous avons constaté, au N° **32**, l'existence d'une seconde forme de l'expression analytique d'une direction, en fonction de la longitude et de la latitude de son extrémité.

Il importe, avant de poursuivre l'étude des produits des coefficients de direction, de nous arrêter sur le rapprochement des deux formes.

Puisqu'on a d'une part :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha' \quad (1)$$

et d'autre part :

$$\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}} = \cos a \cos a' + \sqrt{-1} \sin a \cos a' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' \quad (2)$$

il suffit, pour exprimer algébriquement l'identité des deux formes, de poser :

$$\cos\alpha + \sqrt{-1} \sin\alpha \cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin\alpha \sin\alpha' =$$
$$\cos a \cos a' + \sqrt{-1} \sin a \cos a' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin a' \qquad (3)$$

d'où, en égalant les termes de même acception dans chaque membre :

$$\cos\alpha = \cos a \cos a' ..(4), \quad \sin\alpha\cos\alpha' = \sin a \cos a' ..(5), \quad \sin\alpha\sin\alpha' = \sin a' ..(6).$$

I. *Formules de transition entre les deux formes.* — On tire en premier lieu de ces équations les formules nécessaires pour passer d'une forme à l'autre. — On aura en effet :

1° Pour passer du système des inclinaisons diédrales (α et α') au système des longitudes et latitudes (a et a') :

$$\frac{(5)}{(4)} \ldots \operatorname{tg} a = \operatorname{tg}\alpha \cos\alpha' \ldots (7), \quad \sin a' = \sin\alpha \sin\alpha' \ldots (6)$$

2° Pour passer du système des longitudes et latitudes (a et a') au système des inclinaisons diédrales (α et α').

$$\cos\alpha = \cos a \cos a' \ldots (4), \qquad \frac{(6)}{(5)} \ldots \operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg} a'}{\sin a} \ldots (8).$$

Ce sont, à proprement parler, des formules de transformation de coordonnées.

II. *Equation analytique du triangle sphérique rectangle.* — Entre les modules de l'équation [3], on a la relation :

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha\sin^2\alpha' = \cos^2 a\cos^2 a' + \sin^2 a\cos^2 a' + \sin^2 a' = 1 .. \quad (9)$$

Les équations [4], [5], [6] ne sont donc pas indépendantes, mais liées par la relation [9]. — Il s'en suit que l'une quelconque d'entre

elles doit pouvoir se déduire des deux autres, par exemple [4] de [5] et [6]. — En effet, élevant ces dernières au carré, on a :

$$\sin^2\alpha\cos^2\alpha' = \sin^2 a\cos^2 a'$$
$$\sin^2\alpha\sin^2\alpha' = \sin^2 a'$$

ajoutant :

$$\sin^2\alpha = \sin^2 a\cos^2 a' + \sin^2 a'$$

remplaçant les sinus par les cosinus :

$$1-\cos^2\alpha = (1-\cos^2 a)\cos^2 a' + (1-\cos^2 a')$$

et réduisant :

$$\cos^2\alpha = \cos^2 a\cos^2 a', \text{ d'où : } \cos\alpha = \cos a\cos a' \qquad (4)$$

On peut donc remplacer l'équation [3] par une équation plus simple, obtenue en ajoutant [5] et [6] membre à membre après avoir multiplié les deux membres de [6] par $\sqrt{-1}$, afin de retrouver les deux équations par le développement de leur somme. On a ainsi :

$$\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha\sin\alpha' = \sin a\cos a' + \sqrt{-1}\sin a'$$

ou

$$(\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha')\sin\alpha = \sin a\cos a' + \sqrt{-1}\sin a'$$

ou enfin, à cause de : $\left(\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha' = \sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$,

$$\sqrt{-1}^{\alpha'}\sin\alpha = \sin a\cos a' + \sqrt{-1}\sin a' \qquad \ldots(10)$$

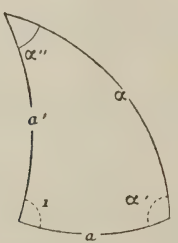


Fig. 22.

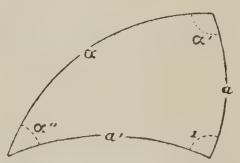


Fig. 23.

L'équation [10] caractérise le triangle *sphérique rectangle* (fig. 22) dans lequel α serait l'hypoténuse, a le côté adjacent et a' le côté opposé à l'angle α'. — En la développant, elle fournit le moyen, deux de ses éléments étant donnés, de trouver les deux autres.

Pour avoir le second angle α'' adjacent à l'hypoténuse, il suffit de remarquer que l'équation (10) peut aussi bien s'écrire, d'après la figure **23**:

$$\sqrt{-1}^{\alpha''}\sin\alpha = \sin\alpha'\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha \qquad (10\ bis)$$

III. *Formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.* — Si, à nos notations, on substitue celles qui sont en usage dans la trigonométrie sphérique, on aura, pour le triangle ABC, rectangle en A (fig. **24**).

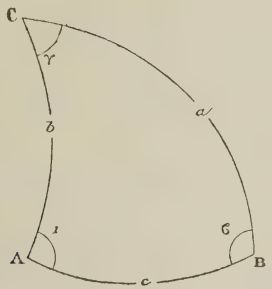


Fig. 24.

$$\sqrt{-1}^{\beta}\sin a = \sin c\cos b + \sqrt{-1}\sin b$$

$$\sqrt{-1}^{\gamma}\sin a = \sin b\cos c + \sqrt{-1}\sin c$$

Il est facile d'en déduire la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique :

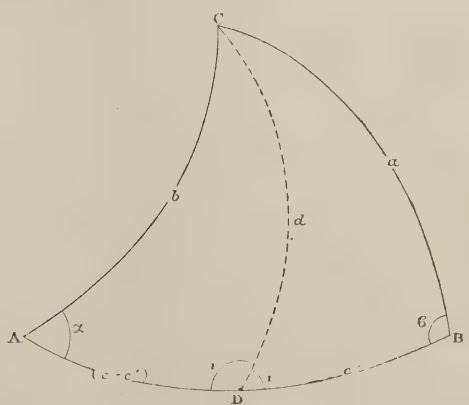


Fig. 25.

Considérons en effet (fig. 25) le triangle quelconque ABC. Abaissons du sommet C un arc CD perpendiculaire sur AB. — Appelons c' et $(c-c')$ les deux segments BD et DA adjacents aux angles droits en D.

Les triangles rectangles CDB et CDA donnent :

$$\cos a = \cos c' \cos d, \ldots \cos b = \cos(c-c')\cos d, \qquad \text{d'où :}$$

$$\frac{\cos b}{\cos a} = \frac{\cos(c-c')}{\cos c'} = \frac{\cos c \cos c' + \sin c \sin c'}{\cos c'} = \cos c + \sin c \operatorname{tg} c', \qquad \text{d'où}$$

$$\operatorname{tg} c' = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\cos a \sin c}$$

On a d'autre part, dans le triangle BCD :

$$\sqrt{-1}^{\beta} \sin a = \sin c' \cos d + \sqrt{-1} \sin d, \text{ d'où } \sin a \cos\beta = \sin c' \cos d,$$

et : $$\sin a \cos\beta = \sin c' \cos d = (\cos c' \operatorname{tg} c') \cos d = (\cos c' \cos d = \cos a) \operatorname{tg} c'$$

$$\sin a \cos\beta = \cos a \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\cos a \sin c}$$

d'où enfin :

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos\beta$$

36. — Cas de deux facteurs non orthogonaux, dont l'un d'acception simple. — Reprenons maintenant l'étude des produits de deux facteurs et examinons le cas où l'un étant toujours d'acception *simple* et représenté (fig. 26) par $OM = \sqrt{-1}^{\alpha}$, l'autre est d'acception *réflexe* et représenté par $ON = \sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$, c'est-à-dire avec cette différence, par rapport au cas du N° 32, que l'arc β n'est plus perpendiculaire à l'arc α.

Il s'agit d'obtenir $OR = \sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$

A l'aide des formules du n° 35, nous pourrons trouver l'autre forme de l'expression de $ON = \sqrt{-1}^{b+b'\sqrt{-1}}$, car nous aurons :

(7)..... $\operatorname{tg} b = \operatorname{tg}\beta \cos\beta'$, et (6)..... $\sin b' = \sin\beta \sin\beta'$.

Call No.

DUPLICATE

Author (Surname first) Evrard, J.

Title Memoire sur l'interpretation des Symboles dits imaginaeres ou Theorie des acceptions (extract principalment des travaux inedets de feu l'abbe George.)

Edition 1891 Place Paris Publisher

22 et 239 pp. av. fig. 5

Date Vols { List price / Est. price / Binding cost } Total est. cost

Recommended by Approved by

to be charged to Fund

When catalogued send to book stack (reserve shelves) (seminar).

" " notify

This card, if filled out by the department, will be returned to the person to be "notified," or, if no one is specified, then to the one "approving" the book order.

Univ. of Ill. Lib.

Si on mène par N le méridien CNQ, on aura AQ=b, NQ=b' et le produit devenu :

$$\sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{b+b'\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{(\alpha+b)+b'\sqrt{-1}}$$

sera facile à construire.

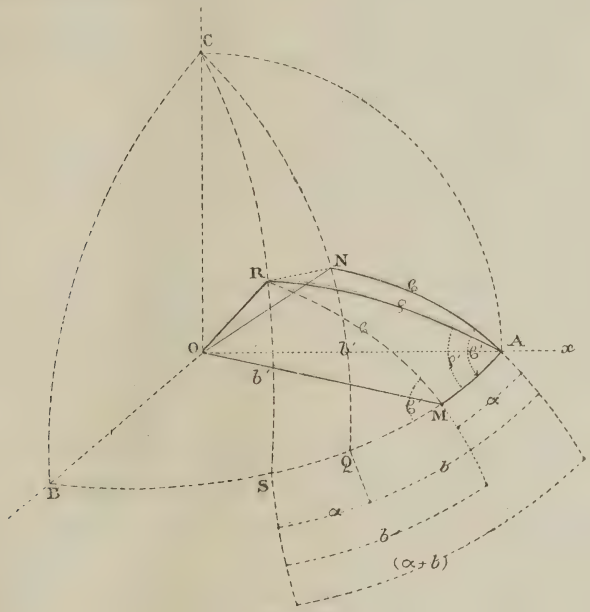


Fig. 26.

Dans le plan horizontal, on portera l'arc MS=b=AQ à la suite de AM=α, et on aura AS=$(\alpha+b)$; puis, sur le méridien SC, portant SR=b', on aura :

$$\mathrm{OR} = \sqrt{-1}^{(\alpha+b)+b'\sqrt{-1}}$$

AR sera l'arc ρ, et ρ' sera l'angle compris entre le plan de cet arc et le plan horizontal : on les calculerait de même à l'aide des formules du n° 35.

(4)..... $\cos\rho = \cos(\alpha+b)\cos b'$ et (8)..... $\operatorname{tg}\rho' = \dfrac{\operatorname{tg} b'}{\sin(\alpha+b)}$

Si cependant on joint RM, les deux triangles RSM et NQA rectangles l'un en S, l'autre en Q et ayant les deux côtés de l'angle droit égaux chacun à chacun, seront égaux. On aura donc RM=β, et l'angle RMS=NAQ=β′

On obtiendrait donc aussi le point R en transportant AN=β en MR, dans un plan de même inclinaison β′ sur le plan horizontal.

On peut donc dire que le facteur représenté par OM a *entraîné* le facteur représenté par ON dans un plan de même inclinaison β′ et d'une quantité *angulaire* égale à l'arc α.

Or, on aurait pu faire la même remarque au n° **32**, avec cette circonstance particulière qu'on avait β′=1 ; et on rappelle qu'on l'a déjà faite au n° **31** pour les facteurs de même réflexité.

37. Cas de deux facteurs d'acception réflexe. — Procédé général. — Supposons enfin deux facteurs d'acception *réflexe*, et de *réflexité différente*, tels que $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$ et $\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$, avec $\alpha' < \beta'$.

Leur produit, quel qu'il soit, ne peut dépendre que de l'inclinaison relative $(\beta' - \alpha')$ de leurs plans respectifs. Il ne saurait être subordonné à la position *absolue* du plan horizontal, choisi arbitrairement.

Mais alors on peut changer la position de ce plan de manière à le faire coïncider avec celui d'un des deux arcs, α par exemple. — Cela revient à diminuer de α′ les deux inclinaisons, et l'équation analytique du problème est :

$$\sqrt{-1}^{\rho_1}\sqrt{-1}^{(\rho'_1-\alpha')} = \sqrt{-1}^{\alpha} \times \sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{(\beta'-\alpha')} \quad \ldots \qquad (1)$$

c'est-à-dire que ce cas est ramené à celui du n° **36**.

Il est clair cependant qu'on peut aussi bien faire coïncider le plan horizontal avec celui de l'arc β, en diminuant de β′ les deux inclinaisons. — Les deux facteurs deviennent alors $\sqrt{-1}^{\beta}$ et $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{-(\beta'-\alpha')}$, et l'équation analytique devra s'écrire, pour ne rien préjuger sur les valeurs de ρ et de ρ′ à l'égard desquelles on n'est pas encore fixé :

$$\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{(\rho'_2-\beta')}} = \sqrt{-1}^{\beta} \times \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{-(\beta'-\alpha')}} \quad \ldots \quad (1)\ bis.$$

Les arcs $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ et $\left(\beta\sqrt{-1}^{\beta'}\right)$ étant (fig. 27) figurés en AM et AN,

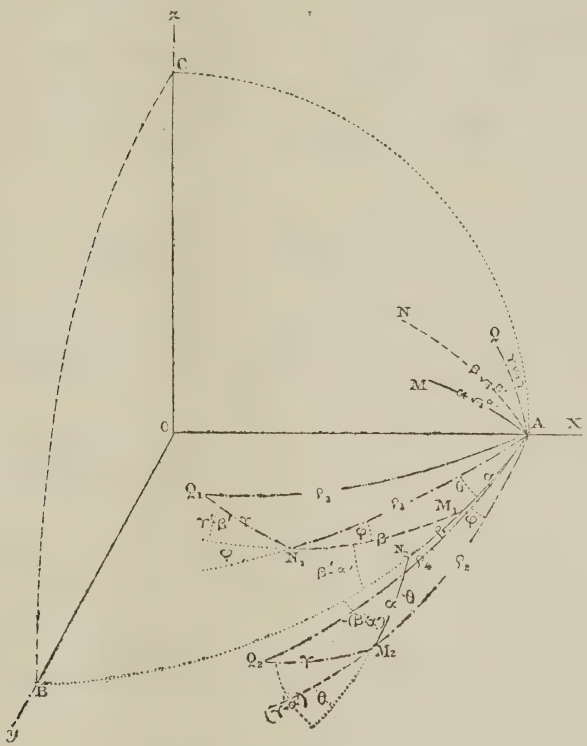


Fig. 27

la première rotation les transportera en AM_1N_1, de telle sorte que l'angle extérieur $N_1M_1B = (\beta' - \alpha')$, et on aura $AN_1 = \rho_1$, avec l'angle $[\widehat{N_1AM_1}, = \theta] = \rho_1' - \alpha'$, d'où $\rho_1' = \alpha' + \theta$.

La seconde rotation les transportera en AN_2M_2, de telle sorte que l'angle extérieur $M_2N_2B = -(\beta' - \alpha')$, et on aura $AM_2 = \rho_2$, avec l'angle $[\widehat{N_2AM_2} = \varphi] = -(\rho_2' - \beta')$, d'où $\rho_2' = \beta' - \varphi$.

L'angle en M_1 du triangle AM_1N_1 est d'ailleurs égal à l'angle en N_2 du triangle AN_2M_2, puisque tous deux ont pour valeur absolue $[2 - (\beta' - \alpha')]$. — Donc $AM_2 = AN_1$, ou $\rho_2 = \rho_1$.

On a d'autre part, $\rho_1' - \rho_2' = (\alpha' + \theta) - (\beta' - \varphi) = [(\theta + \varphi) - (\beta' - \alpha') > o]$ d'après la propriété du triangle sphérique. — Donc $\rho_1' > \rho_2'$.

Ainsi, le produit de deux acceptions réflexes de réflexité différente ($\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$ et $\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$) dépend de l'ordre des facteurs. L'arc $\rho\sqrt{-1}^{\rho'}$ qui le caractérise reste de même grandeur ($\rho_2 = \rho_1$) ; mais son inclinaison change. — Si on la désigne par ρ'_1 dans l'ordre (α, β), et par ρ'_2 dans l'ordre (β, α), et qu'on suppose $\alpha' < \beta'$, on a : $(\rho_1' > \rho_2')$.

Quant aux calculs, on pourrait procéder comme au n° 36, à l'aide des formules du n° 35. — Mais il n'est pas besoin d'introduire de nouveaux angles : il n'y a qu'à opérer directement sur les données.

1° *Ordre* (α, β). — Le développement de l'équation (1) donnera :

$$\cos\rho_1 + \sqrt{-1}\sin\rho_1\cos(\rho_1' - \alpha') + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho_1\sin(\rho_1' - \alpha') =$$
$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta\cos[\beta' - \alpha']) + \sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\beta\sin[\beta' - \alpha']. \quad (2)$$

Ayant égard à la remarque du n° 33, appliquant la règle de calcul du n° 34, et enfin égalant les termes de même acception dans chaque membre, on aura :

$$\cos\rho_1 = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\cos(\beta' - \alpha')\ldots \quad (3)$$

$$\sqrt{-1}\sin\rho_1\cos(\rho_1' - \alpha') = \sqrt{-1}\,[\cos\alpha\sin\beta\cos(\beta' - \alpha') + \sin\alpha\cos\beta]\ldots \quad (4)$$

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho_1\sin(\rho_1' - \alpha') = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\beta\sin(\beta' - \alpha')\ldots \quad (5)$$

Comme on le voit, l'équation (3) donne l'angle ρ_1 par son cosinus. — C'est la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique.

$$\frac{(4)}{(5)} \text{ donne : } \cot(\rho_1' - \alpha') = \frac{\cos\alpha\sin\beta\cos(\beta' - \alpha') + \sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\sin(\beta' - \alpha')} =$$
$$\frac{\cot\beta\sin\alpha - \cos\alpha\cos[2 - (\beta' - \alpha')]}{\sin[2 - (\beta' - \alpha')]}\ldots \quad (6)$$

C'est la formule du troisième cas de la résolution des triangles sphériques.

2° *Ordre* (β, α), — L'équation à traiter est (1 *bis*).

Il est évident, en la comparant avec (1), que pour avoir les formules qui correspondent au second ordre, il suffit de changer, dans celles du premier, α en β et α' en β', et réciproquement.

La valeur de $\cos \rho_1$ ne variera pas, puisque : $\cos[-(\beta'-\alpha')] = \cos(\beta'-\alpha')$. Mais celle de $\cot(\rho'_1 - \alpha')$ serait négative, à cause de : $\sin[-(\beta'-\alpha')] = -\sin(\beta'-\alpha')$.

Il suffira d'écrire $\cot(\beta'-\rho'_2)$ au lieu de $\cot(\rho'_2-\beta')$ dans le premier membre, et on aura :

$$\cot(\beta'-\rho'_2) = \frac{\cos\beta\sin\alpha\cos(\beta'-\alpha') + \sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\sin(\beta'-\alpha')} = \frac{\cot\alpha\sin\beta - \cos\beta\cos[2-(\beta'-\alpha')]}{\sin(\beta'-\alpha')}$$

c'est à dire encore la formule du troisième cas de la résolution des triangles sphériques.

Nota. — Il est à peine besoin de faire remarquer que la double solution existe également dans les deux cas précédemment examinés :

N° *32.* — On a : $\left(\sqrt{-1}^{a}\times\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{a\sqrt{-1}^{0}}\times\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}^{1}}\right)$

La seconde solution s'obtiendra en diminuant les déclivités de **1**, et correspondra au produit :

$$\sqrt{-1}^{a\sqrt{-1}^{0-1}}\times\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}^{1-1}=0} = \sqrt{-1}^{-a\sqrt{-1}}\times\sqrt{-1}^{a'}.$$

N° *36.* — On a : $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{0}}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}\right)$

La seconde solution s'obtiendra en diminuant les déclivités de β' et correspondra au produit :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{0-\beta'}}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'-\beta'=0}} = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{-\beta'}}\times\sqrt{-1}^{\beta}$$

38. Introduction d'un troisième facteur. — Considérons (fig. 27)

un troisième arc $AQ = \gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}$, avec $\gamma' > \beta'$, auquel correspond un troisième facteur $\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}$ à introduire après les deux premiers.

Les équations initiales seraient :

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\alpha,\beta},\gamma)\ldots\ldots \sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3}} = \sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}$$

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\beta,\alpha},\gamma)\ldots\ldots \sqrt{-1}^{\rho_4\sqrt{-1}^{\rho'_4}} = \sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}$$

Pour ramener la question au cas du n° 36, il semble qu'il n'y aurait qu'à diminuer les déclivités de ρ'_1 ou de ρ'_2, et à écrire :

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\alpha,\beta},\gamma)\ldots\ldots \sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3-\rho'_1}} = \sqrt{-1}^{\rho_1} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'-\rho'_1}}$$

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\beta,\alpha},\gamma)\ldots\ldots \sqrt{-1}^{\rho_4\sqrt{-1}^{\rho'_4-\rho'_2}} = \sqrt{-1}^{\rho_2} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'-\rho'_2}}$$

Or, cela ne serait pas exact en ce qui concerne le nouveau facteur introduit.

Car si on représente sur la figure l'arc γ en N_1Q_1 ou en M_2Q_2, comme il devra conserver par rapport à $(M_1N_1 = \beta)$ ou à $(N_2M_2 = \alpha)$ l'inclinaison $(\gamma' - \beta')$ ou $(\gamma' - \alpha')$, son inclinaison par rapport à $(AN_1 = \rho_1)$ ou $(AM_2 = \rho_2)$ ne sera pas ρ'_1 ou ρ'_2, mais $(\gamma' - \beta' + \varphi)$ ou $(\gamma' - \alpha' - \theta)$, et on aura :

$$\gamma' - (\gamma' - \beta' + \varphi) = \beta' - \varphi = \rho'_2$$
$$\gamma' - (\gamma' - \alpha' - \theta) = \alpha' + \theta = \rho'_1$$

de sorte que les équations à traiter seront :

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\alpha,\beta},\gamma)\ldots \sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3-\rho'_1}} = \sqrt{-1}^{\rho_1} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{(\rho'_2=\beta'-\varphi)}} \quad (2)$$

$$\text{dans l'ordre } (\overline{\beta,\alpha},\gamma)\ldots \sqrt{-1}^{\rho_4\sqrt{-1}^{\rho'_4-\rho'_2}} = \sqrt{-1}^{\rho_2} \times \sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{(\rho'_1=\alpha'+\theta)}} \quad (2\text{ bis})$$

Tandis d'ailleurs que le produit des deux premiers facteurs a donné $\rho_2 = \rho_1$, la figure montre qu'on n'aura pas $\rho_4 = \rho_3$.

Car les triangles AN_1Q_1 et AM_2Q_2 ont respectivement deux côtés égaux $AN_1 = AM_2$, $N_1Q_1 = M_2Q_2$: mais l'angle en N_1 du premier a pour valeur $2 - (\gamma' - \beta' + \varphi)$: l'angle en M_2 du second a pour valeur $2 - (\gamma' - \alpha' - \theta)$. On a donc :

$$\hat{N}_1 - \hat{M}_2 = 2 - (\gamma' - \beta' + \varphi) - 2 + (\gamma' - \alpha' - \theta) = [(\beta' - \alpha') - (\varphi + \theta) < 0],$$

donc $\hat{N}_1 < \hat{M}_2$, par conséquent $\rho_3 < \rho_4$.

Il n'y aura d'ailleurs qu'à traiter les équations (2) et (2^{bis}), comme on a traité, au n° **37**, les équations (1) et (1^{bis}), pour obtenir les valeurs de ρ_3, $(\rho'_3 - \rho'_1)$ et de ρ_4, $(\rho'_4 - \rho'_2)$. — Les résultats seront conformes à ceux que donnerait l'emploi direct de la trigonométrie sphérique.

39. Cas d'un nombre quelconque de facteurs. Composition des arcs. — Considérons enfin un nombre quelconque de facteurs respectivement caractérisés par autant d'arcs :

$$\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'},\ \beta\sqrt{-1}^{\beta'},\ \gamma\sqrt{-1}^{\gamma'},\ \ldots\ldots\ \lambda\sqrt{-1}^{\lambda'},\ \mu\sqrt{-1}^{\mu'},$$

en supposant toujours pour fixer les idées :

$$\alpha' < \beta' < \gamma' \ldots\ldots < \lambda' < \mu'.$$

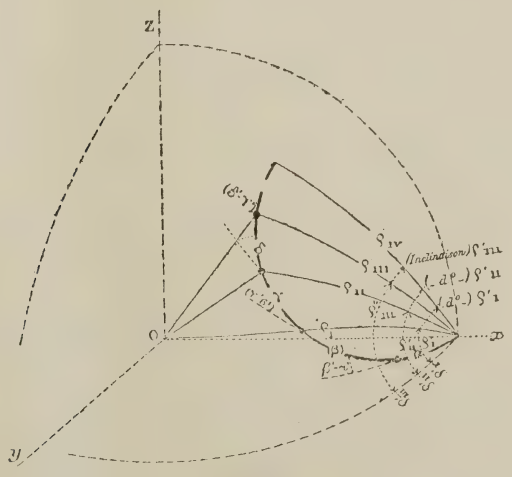


Fig. 28.

Ces facteurs étant introduits dans un ordre *déterminé*, puisque cet ordre influe sur le résultat, si on suit sur la surface de la sphère la série des positions occupées par les extrémités des rayons qui correspondent aux produits successifs résultant de l'introduction d'un nouveau facteur, on reconnaît que ces positions ne sont autre chose que les *sommets d'un polygone sphérique* dont les côtés sont respectivement égaux aux arcs α, β, γ..... λ, μ, et les angles respectivement égaux aux inclinaisons mutuelles des mêmes arcs ou aux suppléments de ces inclinaisons.

Le polygone sera convexe si les facteurs ont été introduits dans l'ordre naturel α, β, γ, δ..... — Il aura des angles rentrants si cet ordre a été interverti : par exemple, les angles seront alternativement rentrants et saillants pour la combinaison : $\overline{\beta,\alpha},\overline{\delta,\gamma}\ldots\overline{\mu,\lambda}$.

S'il y a n arcs ou facteurs, le polygone se fermera par l'arc $\rho_{n-1}\sqrt{-1}^{\rho' n-1}$

Il est clair d'ailleurs que l'arc de rang K ou $\rho_K\sqrt{-1}^{\rho' K}$, correspondant au produit des $(K+1)$ premiers facteurs, et qui est une diagonale du polygone, peut être considéré comme la résultante d'une *composition de* $(K+1)$ *arcs* à la surface de la sphère, — composition qui présente avec celle des *droites* dans le plan une évidente analogie, mais aussi une différence essentielle :

Tandis que la résultante d'une composition de *droites* est invariable comme grandeur et comme direction, celle d'une composition *d'arcs* varie avec l'ordre de la composition de la même manière que les produits correspondants varient avec l'ordre de l'introduction des facteurs.

C'est ce que la théorie des Quaternions, qui appelle « *Addition sphérique* » la composition des arcs, exprime en ces termes : « *L'addition sphérique n'est pas commutative* » et « *la multiplica-* « *tion* (*des biradiales ou des vecteurs non-coplanaires*) *n'est pas* « *commutative non plus.* » [Laisant. — Introduction à la Théorie des Quaternions, p. 36],—ou encore « La *multiplication* n'est plus « *commutative* EN GÉNÉRAL » [Ibidem. — Préface, p. VIII], restriction qui correspond, dans la Théorie des Acceptions, au cas du

n° 31 : la multiplication demeure *commutative* pour les acceptions de *même réflexité*.

40. **Conséquences. Les équations analytiques posées entre des facteurs et des produits de réflexité différente ne peuvent être traitées *sans réserve* comme des équations algébriques ordinaires.** — De ce qui précède (n° 39) il résulte que les relations établies sous forme d'équations entre l'expression analytique du *produit* d'acceptions réflexes de *réflexité différente* et l'indication de la multiplication des expressions analytiques des facteurs, ne sont pas des équations algébriques *ordinaires* ; et si on les traite *sans réserve* comme telles, on doit prévoir que l'algèbre manifestera à sa manière, c'est à dire en conduisant à des contradictions, qu'on fait fausse route.

Confirmation par divers exemples. — I. *Relation du n° 30.* — Soit en premier lieu la relation du N° 30, écrite sous la forme :

$$\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = \sqrt{-1}^{\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\ldots\right)} \ldots\ldots (1)$$

Si on la considère comme une équation algébrique *ordinaire*, on pourra égaler les exposants de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, c'est à dire poser :

$$\rho\sqrt{-1}^{\rho'} = \alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\ldots$$

Les éléments de chaque terme étant des arcs, ce devrait être l'équation de la *composition des arcs* à la surface de la sphère.

Mais la forme de cette équation est *absolument identique* avec celle de la composition des droites dans le plan :

$$R\sqrt{-1}^{\rho} = A\sqrt{-1}^{\alpha}+B\sqrt{-1}^{\beta}+C\sqrt{-1}^{\gamma}+\ldots\ldots$$

On ne saurait donc tirer du développement de la première pour ρ et ρ' en fonction de α, β..., α', β'...., que des relations *absolument identiques* avec celles qu'on tirerait de la seconde pour R et ρ en fonction de A, B,...., α, β.....

Or, nous venons de constater (N° 39) que les deux sortes de composition sont essentiellement différentes. L'équation (1) traitée algébriquement *sans réserve*, ne peut donc conduire qu'à des résultats faux.

II. *Relation du n° 32.* — Soit, en second lieu, la relation du n° 32 qui exprime l'identité entre les deux formes de l'acception réflexe :

$$\sqrt{-1}^{\alpha \sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}$$

Si elle peut être traitée algébriquement *sans réserve*, on sera de même en droit d'égaler les exposants de $\sqrt{-1}$ dans les deux membres, c'est à dire d'écrire :

$$\alpha \sqrt{-1}^{\alpha'} = a + a' \sqrt{-1}$$

Voici ce qui en résulte :

1° Développant le premier membre, à cause de :

$$\sqrt{-1}^{\alpha'} = \cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha',$$

on a :

$$\alpha(\cos\alpha' + \sqrt{-1}\sin\alpha') = a + a'\sqrt{-1}$$

Egalant les termes de même acception, il vient :

$$\alpha\cos\alpha' = a \quad , \quad \alpha\sin\alpha' = a'.$$

D'où carrant et ajoutant, et à cause de : $\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha' = 1$,

$$\alpha^2 = a^2 + a'^2.$$

Or, c'est seulement dans le triangle rectangle *rectiligne*, et non dans le triangle rectangle *sphérique* que le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

2° Algébriquement, si deux quantités sont en équation, leurs

puissances de même degré sont également en équation. — On aurait donc :

$$\left[\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)^{n}=\sqrt{-1}^{n\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right]=\left[\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)^{n}=\sqrt{-1}^{na+na'\sqrt{-1}}\right]$$

d'où, en égalant les exposants :

$$n\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}=na+na'\sqrt{-1}.$$

Or, c'est seulement dans les triangles rectangles rectilignes, et non dans les triangles rectangles sphériques, que les côtés de l'angle droit croissent proportionnellement à l'hypoténuse.

3° Admettons qu'on demande à chaque forme de caractériser l'axe des z positifs.

Pour la première, on devra poser $\alpha=\alpha'=1$ (n° 2), et il en résultera $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Pour la seconde, on devra poser $a'=1$; mais il n'y aura pas besoin d'assigner une valeur particulière à a (n° 33). On aura donc :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}}$$

d'où il résulterait *algébriquement*, en égalant encore les exposants :

$$\sqrt{-1}=a+\sqrt{-1}.$$

équivalence qui répugne absolument à la rigueur mathématique.

III. *Relation initiale du N° 37.* — Reprenons l'équation analytique du produit de deux facteurs :

$$\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}=\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}\times\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

qui a été traitée au n° 37 de manière à ramener ce cas à celui du n° 36, ce qui a conduit à constater l'existence de deux produits distincts dépendant de l'ordre des facteurs, et à vérifier que les ré-

sultats sont en complète concordance avec ceux que donne l'emploi direct de la trigonométrie sphérique.

Essayons de traiter directement l'équation (1), sans préparation préalable de ses termes, en opérant sur leur développement orthogonal, c'est à dire en écrivant :

$$\left.\begin{array}{c}\cos\rho+\sqrt{-1}\,\sin\rho\cos\rho'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho'= \\ \left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha.\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha.\sin\alpha'\right)\left(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta.\cos\beta'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\beta.\sin\beta'\right)\end{array}\right\}(2)$$

Le second membre de cette équation se résoudra, comme le premier, en trois termes d'acception différente : $A+B\sqrt{-1}+C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, d'où l'on déduira :

$$\cos\rho=A\ldots\ldots(3),\quad \sin\rho\cos\rho'=B\ldots\ldots(4),\quad \sin\rho\sin\rho'=C\ldots\ldots(5).$$

(3) donne l'angle ρ par son cosinus,... : $\frac{(4)}{(5)}$ donne : $\cot\rho'=\frac{B}{C}$.

Mais α et α' entrant exactement de la même manière que β et β' dans (1) et (2), on peut prévoir que les résultats ne révèleront immédiatement aucun indice de la double solution, pas plus qu'ils ne présenteront de concordance avec les formules de la trigonométrie sphérique.

Algébriquement cependant, il suffit de *deux* équations pour déterminer deux inconnues, et on en a *trois*..... (3), (4) et (5).

Equation de condition. — Les modules A, B, C doivent donc satisfaire à une équation de condition, très facile d'ailleurs à établir : car la somme des carrés des premiers membres des équations (3), (4), (5) est égale à l'unité. On devra donc avoir également :

$$A^2+B^2+C^2=1\ldots\ldots \qquad (6)$$

Or le développement ci-après des calculs directs sur l'équation (2) va nous conduire à reconnaître que l'équation de condition (6) équivaut à celle-ci :

$$\sin\alpha'.\sin\beta'=0 \qquad (7)$$

laquelle devra être satisfaite *sans particulariser la question.*

Comme on peut disposer de α' et de β', pourvu que la différence $(\beta'-\alpha')$ demeure invariable, il n'y aura qu'à diminuer successivement les deux inclinaisons de α' d'abord, de β' ensuite, de manière à satisfaire à l'équation (7) par $\sin(\alpha'-\alpha')=0$ ou par $\sin(\beta'-\beta')=0$.

On est ainsi amené *analytiquement* au procédé du N° 37, qui n'a d'abord été présenté que d'une manière *synthétique.*

1° *Détermination des modules A, B, C.*

Pour abréger les écritures, nous substituerons momentanément les coordonnées à leurs expressions trigonométriques, sauf à revenir ensuite à celles-ci.

Nous poserons donc :

$$\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'=x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},\text{ avec } x^2+y^2+z^2=1,$$

$$\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta\cos\beta'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\beta.\sin\beta'=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\text{ avec } x'^2+y'^2+z'^2=1,$$

$$\cos\rho+\sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho.\sin\rho'=A+B\sqrt{-1}+C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},\text{ avec } A^2+B^2+C^2=1,$$

A, B, C étant les trois modules du développement du second membre de l'équation (2), qu'il s'agit de déterminer, et qui ne sont autre chose que les coordonnées de l'extrémité de la résultante.

En disposant les calculs comme pour une multiplication algébrique ordinaire, on peut former le tableau :

$$\begin{array}{l} x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \\ \underline{x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} \\ A\ldots\ldots\ldots = xx'-yy'-zz' \\ B\sqrt{-1}\ldots\ldots = (xy'+x'y)\sqrt{-1} \\ C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = (x+y\sqrt{-1})z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+(x'+y'\sqrt{-1})z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \end{array}$$

Il n'y a aucune difficulté à l'égard des termes A et $B\sqrt{-1}$, et on a pu les écrire immédiatement sous leur forme définitive.

Mais pour le troisième terme $C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, les opérations ne sont qu'indiquées, le module C n'est pas dégagé.

Procédant d'après la règle du N° **34**, nous écrirons :

$$(x+y\sqrt{-1})z'^{\sqrt{-1}}=z'^{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$
$$(x'+y'\sqrt{-1})z^{\sqrt{-1}}=z^{\sqrt{x'^2+y'^2}}\cdot\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

et nous aurons :

$$C\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\left(z'^{\sqrt{x^2+y^2}}+z^{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right)\cdot\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

2° *Equation de condition* : $A^2+B^2+C^2=1$, ou :

$$(xx'-yy'-zz')^2+(xy'+x'y)^2+(z'^{\sqrt{x^2+y^2}}+z^{\sqrt{x'^2+y'^2}})^2=1.$$

Développant et réduisant, on arrive à :

$$zz'\left[yy'-xx'+\sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}\right]=0.$$

Cette équation peut être satisfaite en égalant à zéro l'un des facteurs du premier membre : (zz') ou $[yy'-xx'+\sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}]$; mais elle doit l'être *sans particulariser la question.*

Posons d'abord :

$$yy'-xx'+\sqrt{(x^2+y^2)(x'^2+y'^2)}=0$$

Il en résulte après développement et réduction :

$$xy'+yx'=0$$

d'où : $\frac{x}{x'}=-\frac{y}{y'}$, ce qui implique une proportionnalité entre deux des coordonnées ; cette solution est donc à écarter.

Posons en second lieu :

$$zz'=0.$$

L'équation sera satisfaite sans particulariser la question si l'on

choisit pour plan horizontal celui qui contient l'une des directions (*ou l'un des arcs* α *ou* β) puisqu'on aura $z=0$ dans le premier cas, $z'=0$ dans le second.

3° *Retour aux expressions trigonométriques des coordonnées :* Remplaçant z par $\sin\alpha.\sin\alpha'$, z' par $\sin\beta.\sin\beta'$, on a :

$$\sin\alpha.\sin\alpha'.\sin\beta.\sin\beta'=0.$$

Mais $\sin\alpha$ et $\sin\beta$ ne peuvent devenir nuls que pour les valeurs particulières α ou $\beta=0$. On doit donc écarter ces facteurs, et il ne reste, ainsi qu'on l'a annoncé, que :

$$\sin\alpha'.\sin\beta'=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

41. Equation symbolique des produits de facteurs de réflexité différente. — Il est donc démontré qu'entre l'expression *algébrique* de la multiplication de plusieurs *expressions analytiques* d'acceptions de *réflexité différente* $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}\times\ldots\ldots\right)$ et l'expression analytique de leur produit $\left(\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}\right)$, on ne peut établir une équation algébrique *ordinaire* qu'il soit permis de traiter algébriquement *sans réserve*, par la raison que ce produit n'est pas de nature algébrique *ordinaire*, puisqu'il varie avec l'*ordre* des facteurs.

Mais si l'on se contente d'attribuer à l'équation un caractère *symbolique*, rien n'empêche de s'en servir comme d'une notation commode pour abréger l'écriture et le discours.

Convention nécessaire. — Alors cependant il sera nécessaire d'adopter une convention qui spécifie le caractère particulier de l'équation. Nous proposerons, par exemple, d'enfermer chaque membre entre crochets [.....]

Cela posé, si nous écrivons :

$$\left[\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}\right]=\left[\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}\times\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}\times\ldots\ldots\right.$$
$$\left.=\sqrt{-1}^{\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\ldots\right)}\right]$$

il sera entendu que l'ordre de la multiplication et de la composition doit être celui des facteurs ou des exposants dans le second membre.

Si cet ordre est interverti, la résultante variera, ρ et ρ' deviendront ρ_1 et ρ_1' et nous devrons écrire par exemple.

$$\left[\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho_1'}}\right]=\left[\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}\times\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\times\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}\times\ldots\ldots\right.$$
$$\left.=\sqrt{-1}^{\left(\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\ldots\right)}\right]$$

moyennant quoi toute incertitude disparaîtra.

Equation symbolique de la composition des arcs. — La même convention s'applique tout naturellement aux équations entre les exposants, et on dira à bon droit que les équations suivantes sont les équations *symboliques* de la composition des arcs.

$$\left[\rho\sqrt{-1}^{\rho'}\right]=\left[\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\right]$$
$$\left[\rho_1\sqrt{-1}^{\rho_1'}\right]=\left[\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\ldots\right]$$

La forme de ces dernières équations justifierait d'ailleurs l'emploi du terme d'*addition sphérique* pour désigner la *composition des arcs*, ou celle du mot *somme*, pour désigner la *résultante* de cette composition, sous la réserve suivante :

Tandis que dans un polygone *rectiligne,* l'expression analytique de la résultante est vraiment la *somme algébrique* des expressions analytiques des éléments du contour polygonal, — ce n'est plus qu'une *somme symbolique* dans le polygone *sphérique* : car la propriété essentielle d'une *somme algébrique* ordinaire est de demeurer invariable quel que soit l'ordre dans lequel on additionne les parties dont elle se compose.

De même d'ailleurs que le contour rectiligne *fermé*, dont l'élément a pour expression générale $\left(A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$, est *caractérisé* (N° 7) par l'équation :

$$\Sigma\left(A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)=0,$$

de même le polygone sphérique dont le côté aurait pour expression générale $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$ serait *symbolisé* par l'équation [entre crochets] :

$$\left[\Sigma\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)=0\right]$$

42. Solution d'un paradoxe analytique. — C'est dans le sens qu'on vient de lui attribuer qu'il faudrait entendre le mot *somme*, par exemple, pour résoudre une espèce de paradoxe analytique posé en ces termes, sous forme de prétendu théorème, dans les *Nouvelles Annales mathématiques* de MM. Terquem et Gérono (T. VI, 1847, pages 271 et 365).

Question (ou proposition). — Si tg $a=\pm\sqrt{-1}$, on aura aussi tg $(a+b)=\pm\sqrt{-1}$, quelle que soit la valeur réelle ou imaginaire de tg b.

Solution (ou démonstration). — Posons tg $b=\alpha+6\sqrt{-1}$, α et 6 pouvant être nuls, positifs ou négatifs.

En appliquant la formule de la trigonométrie rectiligne, $\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$, on a :

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\pm\sqrt{-1}+(\alpha+\beta\sqrt{-1})}{1\mp(\alpha+\beta\sqrt{-1})\sqrt{-1}}=\frac{\alpha+(\beta\pm1)\sqrt{-1}}{(1+\beta)\mp\alpha\sqrt{-1}}$$

Si l'on prend les signes supérieurs :

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\alpha+(\beta+1)\sqrt{-1}}{(1+\beta)-\alpha\sqrt{-1}}=\frac{\sqrt{-1}\,[(\beta+1)-\alpha\sqrt{-1}]}{(1+\beta)-\alpha\sqrt{-1}}=+\sqrt{-1}$$

Si l'on prend les signes inférieurs :

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\alpha+(\beta-1)\sqrt{-1}}{(1-\beta)+\alpha\sqrt{-1}}=\frac{\alpha-(1-\beta)\sqrt{-1}}{(1-\beta)+\alpha\sqrt{-1}}=\frac{-\sqrt{-1}\,[(1-\beta)+\alpha\sqrt{-1}]}{(1-\beta)+\alpha\sqrt{-1}}=-\sqrt{-1}$$

Comme opération algébrique, ce calcul est incontestablement régulier ; mais il n'est pas moins certain que le résultat est *entièrement dépourvu de sens*, et que la formule de la trigonométrie rectiligne n'était pas applicable aux données, puisqu'on a vu (n° 17-II) qu'on n'y peut introduire que les *modules*, toujours *réels*, de tangentes d'*arcs mesurés sur une même circonférence*.

Il y avait évidemment, avant tout, à chercher ce que peuvent signifier les données, c'est-à-dire ce que peuvent être des arcs a et b tels que l'on ait :

$$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{-1}, \qquad \operatorname{tg} b = \alpha + \beta\sqrt{-1}$$

La théorie des acceptions en rend aisément compte.

Tous les arcs étant mesurés, à partir de l'extrémité du rayon dirigé suivant l'axe des x positifs, sur des circonférences dont les plans passent par le même axe, toutes les tangentes seront contenues dans le plan passant par l'origine des arcs et parallèle au plan des yz.

Cela posé, désigons par t une longueur exprimée en fonction du rayon pris pour unité.

1° Dire que $\operatorname{tg}\varphi = t$, c'est dire que l'arc φ est mesuré sur la circonférence située dans le plan horizontal. Dans ce cas, l'expression analytique de la tangente est, comme on sait (n° 16-IV), $t\sqrt{-1}$.

2° Dire que $\operatorname{tg}\varphi = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, avec $\alpha^2 + \beta^2 = t^2$, c'est dire que l'arc φ s'est relevé dans le plan d'inclinaison $\left(\varphi' = \operatorname{arc\,tg}\frac{\beta}{\alpha}\right)$. Dans ce cas, l'expression analytique de la tangente (n° 16-IV) est $t\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\,\varphi'}$, et l'on a :

$$t\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}\,\varphi'} = t\left(\sqrt{-1}\cos\varphi' + \sqrt{-1}\sqrt{-1}\sin\varphi'\right) = t\left(\sqrt{-1}\,\frac{\alpha}{t} + \sqrt{-1}\sqrt{-1}\,\frac{\beta}{t}\right)$$
$$= \alpha\sqrt{-1} + \beta\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},$$

expression à laquelle on parviendrait encore, d'après la règle du

n° 23 (A), en substituant $(\alpha+\beta\sqrt{-1})$ à t dans l'expression analytique $t\sqrt{-1}$ de tg φ (1°).

3° Dire que tg $\varphi = t\sqrt{-1}$, ce qui revient au cas précédent (2°) en faisant $\alpha = 0$ et $\beta = t$, c'est dire que l'arc φ s'est relevé d'un angle droit et est passé du plan horizontal dans le plan vertical des xz. Dans ce cas, l'expression analytique de la tangente serait $t\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, et on y parviendrait également, d'après la règle du n° 23 (C), en substituant $t\sqrt{-1}$ à t dans l'expression analytique $(t\sqrt{-1})$ de tg φ (1°).

4° Dire enfin que tg $\varphi = \sqrt{-1}$ revient à faire $t = 1$ dans le cas précédent (3°). Mais l'arc dont la tangente a pour module l'unité (ou le rayon) est un arc de 45° $\left(\text{ou égal à } \frac{1}{2} \text{ en fonction du quadrant}\right)$: ainsi, l'arc défini est un arc de 45° situé dans le plan vertical des xz ; l'expression analytique de sa tangente serait $1 \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, et on y parviendrait encore, d'après la règle du n° 23 (C), en substituant $\sqrt{-1}$ à t dans l'expression analytique $t\sqrt{-1}$ de tg φ (1°).

Etant ainsi interprétées les données de la *question* ou de la *proposition* formulée au début du présent article, on voit que la solution ne peut consister que dans la *composition* de *deux arcs* : l'un (4°) exprimé par $\left(\frac{1}{2}\sqrt{-1}\right)$, arc de 45° situé dans le plan des xz ; l'autre (2°) exprimé par $\varphi\sqrt{-1}^{\varphi'}$ situé dans le plan d'inclinaison $\varphi' = \text{arc tg } \frac{\beta}{\alpha}$, avec $\varphi = \text{arc tg.}\ (\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=t)$.

La solution sera double et s'obtiendra par le procédé général du n° 37, en amenant successivement chacun des arcs dans le plan horizontal pour que l'un des facteurs devienne d'acception simple.

La formule de la trigonométrie rectiligne ne serait applicable que dans le cas de deux arcs de même acception.

Supposons par exemple :

$$\text{tg } \varphi = t = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \text{ et tg } \varphi' = \frac{\beta}{\alpha}$$

$$\text{tg } \psi = mt = \sqrt{(m\alpha)^2+(m\beta)^2}, \text{ et tg } \psi' = \frac{m\beta}{m\alpha} = \frac{\beta}{\alpha} = \text{tg } \varphi'$$

on aura évidemment :

$$\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{t+m\,t}{1-mt}$$

et l'expression analytique de cette ligne sera :

$$\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\varphi'}}\operatorname{tg}(\varphi+\psi)=\frac{t+mt}{1-mt^2}\left(\frac{\alpha}{t}\sqrt{-1}+\frac{\beta}{t}\sqrt{-1}\sqrt{-1}\right)$$

43. Cas où les facteurs sont de la seconde forme $\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}$. — Nous n'avons considéré, à partir du n° 37, que des produits de facteurs exprimés par la première forme $\left(\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$ des coefficients de direction et nous avons reconnu au n° 40 que, pour l'exactitude des résultats, il est indispensable de recourir toujours au procédé du n° 37, consistant à ramener dans le plan horizontal le plan de l'un des facteurs, ou le plan de la résultante obtenue, lorsqu'on introduit un nouveau facteur.

Il reste à examiner comment ce procédé doit être appliqué dans le cas où les facteurs seraient donnés par la seconde forme $\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)$ dont l'existence a été constatée au n° 32.

Car il est clair que les conséquences des calculs du n° 40-III, déduites de l'étude d'un produit :

$$\left[\left(x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\left(x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\right]$$

où les modules trigonométriques sont remplacés par les coordonnées, sont indépendantes de la forme analytique sous laquelle les facteurs sont envisagés, et que l'équation de condition :

$$z\,z'=0.$$

demeure invariable.

Or dans le cas de la seconde forme, à cause de :

$$z=\sin a', \text{ et } z'=\sin b'.$$

cette équation équivaut à :

$$\sin a' \sin b' = 0.$$

Mais on ne saurait y satisfaire *directement* par un artifice analogue à celui du n° 37 : car il est facile d'établir, à l'égard de l'altération des *latitudes* et des *longitudes*, les propositions suivantes.

1° On ne peut altérer les *latitudes* $(a'\ b')$ en les augmentant ou en les diminuant d'une même quantité.

Supposons en effet, le cas de deux latitudes égales, c'est-à-dire les expressions $\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{b+a'\sqrt{-1}}$

Elles ont pour représentation géométrique deux génératrices d'un cône d'axe vertical dirigé suivant l'axe des z, et dont l'angle au sommet est $2\,(1-a')$.

Si l'on diminue les latitudes de a', les expressions $\sqrt{-1}^{a}$ et $\sqrt{-1}^{b}$ représentent deux rayons situés dans le plan horizontal.

Si l'on augmente les latitudes de $(1-a')$, les expressions $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{b+\sqrt{-1}}$, équivalentes toutes deux (n° 33) à $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, représentent l'axe des z.

Les produits des facteurs altérés seraient donc eux-mêmes tout différents de ceux des facteurs donnés.

Et il y a plus : c'est que lors même qu'il s'agirait de combiner ces facteurs non plus par voie de *multiplication*, mais par voie d'*addition* ou de *soustraction*, l'altération des latitudes fausserait encore les résultats. Car la somme :

$$\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}^{b+a'\sqrt{-1}}$$

représente la diagonale d'un losange construit sur les deux génératrices du cône ci-dessus défini, tandis qu'en augmentant par exemple les latitudes de $(1-a')$ la somme :

$$\sqrt{-1}^{a+(a'+1-a')\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}^{b+(a'+1-a')\sqrt{-1}}$$

ou :

$$\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}^{b+\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \qquad (\text{n}^\circ\ 33).$$

se réduit à :

$$2\ \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

c'est-à-dire qu'elle représente une longueur double du rayon, mesurée sur l'axe des z à partir de l'origine des coordonnées.

2° On ne peut altérer les *longitudes* (a, b) en les augmentant ou en les diminuant de la même quantité, lorsqu'il s'agit de combiner les facteurs par voie de *multiplication*.

Supposons, en effet, le cas de deux longitudes égales, c'est-à-dire les expressions $\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{a+b'\sqrt{-1}}$. Elles représentent deux rayons d'un même méridien ; mais elles sont de réflexité différente, puisqu'on aura d'après la formule (8) du n° 35 :

$$\operatorname{tg}\alpha' = \frac{\operatorname{tg} a'}{\sin a}, \qquad \operatorname{tg}\beta' = \frac{\operatorname{tg} b'}{\sin a}$$

Or, si on diminue les longitudes de a, les deux expressions deviennent :

$$\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}} \text{ et } \sqrt{-1}^{b'\sqrt{-1}}$$

c'est-à-dire qu'elles sont de même réflexité. Elles représentent deux rayons situés dans le plan des xz et leur produit est :

$$\sqrt{-1}^{(a'+b')\sqrt{-1}}$$

Réciproquement, si on augmente de a les *longitudes* des deux facteurs $\sqrt{-1}^{a'\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{b'\sqrt{-1}}$ qui sont de même réflexité, ils deviendront $\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}$ et $\sqrt{-1}^{a+b'\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire de réflexité différente.

Mais contrairement à ce qui a lieu pour les *latitudes*, s'il s'agit de combiner les deux facteurs par voie d'addition ou de soustraction, la transformation des longitudes sera sans influence sur le résultat.

Car la somme :

$$\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}} + \sqrt{-1}^{b+b'\sqrt{-1}}$$

représente la diagonale d'un parallélogramme construit sur deux rayons pris dans deux méridiens formant entre eux l'angle $(b—a)$.

Or, si a et b deviennent $(a \pm c)$ et $(b \pm c)$, on aura toujours

$$(b \pm c) - (a \pm c) = (b - a).$$

La situation respective des deux rayons n'aura donc pas changé, ce qui suffit pour que leur *somme géométrique* demeure invariable.

On peut donc, dans ce cas, faire usage de l'altération des longitudes. — Elle offre même une ressource utile dans certains cas : on en verra un exemple au n° 69.

En général donc, pour faire le produit de plusieurs coefficients de direction donnés sous la seconde forme $\left(\sqrt{-1}^{a+a'\sqrt{-1}}\right)$, il faudra au préalable établir leurs équivalents sous la première forme, au moyen des formules (4) et (8) du n° 35.

44. Conclusion des quatre premiers chapitres.

La partie théorique de la méthode des acceptions ou coefficients de direction exprimés au moyen des symboles *dits* imaginaires peut être considérée comme prenant fin avec le présent chapitre. — La signification géométrique et algébrique de ces symboles a été établie, ainsi que les règles de calcul qui leur sont particulières, notamment celles des n^{os} **23** et **34**, le procédé général du n° **37** pour les produits des facteurs de réflexité différente, les remarques du n° **40** sur la réserve avec laquelle on doit user des *relations* établies sous forme d'*équations algégriques* entre le produit de ces facteurs et l'indication de leur multiplication, en se gardant de traiter ces relations comme des équations algébriques *ordinaires*, et en les

considérant seulement comme des équations *symboliques* (n° **41**) ; enfin (n° **43**), la *nécessité* de ramener les facteurs à la première forme $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$ lorsqu'ils se présentent sous la seconde forme $\sqrt{-1}^{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}}$, dont l'existence a été constatée au n° **32**.

On devra toutefois regarder comme se rattachant à la théorie les quatre derniers n^{os} (**71** à **74**) du chapitre VII, qui complètent la démonstration de la proposition particulière à la géométrie à trois dimensions, et énoncée au n° **10** en ces termes : *Toute fonction de* $\sqrt{-1}$ *est réductible à la forme* : $\left(p+q\sqrt{-1}+r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$. La dite proposition contient implicitement, en y faisant $r=0$, celle de l'algèbre ordinaire ou de la géométrie plane.

On va maintenant passer aux applications qui comprendront les chapitre V, VI et VII, savoir :

Chapitre V. — Applications algébriques de la théorie des acceptions ;

Chapitre VI. — Interprétation et représentation des fonctions de symboles imaginaires en géométrie analytique à deux et trois dimensions ;

Chapitre VII. — Mise en équation et résolution des questions de géométrie analytique.

Le Chapitre VIII, comme on l'a dit dans le préambule de la Préface, sera consacré aux travaux de l'abbé George.

CHAPITRE V

Applications algébriques de la théorie des acceptions

45. — Equations algébriques. — Racines exprimées en fonction de $\sqrt{-1}$.
46. — Equation binôme. — Forme générale.
47. — Racines de l'unité.
48. — Leurs propriétés.
49. — Décomposition en facteurs d'une racine de rang quelconque.
50. — Calcul des radicaux : Multiplication, Division, Puissances, Racines.
51. — id. Addition, Soustraction.

45. Equations algébriques. Racines exprimés en fonction de $\sqrt{-1}$. — L'étude des racines des équations algébriques, lorsque leurs expressions sont fonction de $\sqrt{-1}$, l'interprétation de ces expressions, la représentation géométrique et la construction de ces racines constituent une des principales applications algébriques de la théorie des acceptions.

Nous n'aborderons pas ce sujet, parce qu'il a été traité avec détail par M. Vallès, pour les équations des cinq premiers degrés, dans le second volume (1873) de son ouvrage intitulé : « *Des Formes imaginaires en Algèbre.* »

M. Vallès, cependant, est parti, non pas de la notion de l'*acception*, mais de celle des *longueurs dirigées*, établie dans le premier volume (1869) du même ouvrage. — On reviendra (n° 67) sur la comparaison de ces deux conceptions, et sur l'avantage que présente, au point de vue du calcul, l'emploi des symboles d'acception. — Mais les résultats étant identiques par l'un ou l'autre procédé, il serait sans utilité d'insister ici sur les sujets que M. Vallès a traités.

Nous nous contenterons de considérer l'équation binôme de degré quelconque, ce qui nous fournira l'occasion de revenir, comme nous l'avons annoncé au n° 4, sur les propriétés des racines de l'unité, et, en outre, de présenter quelques résultats intéressants sur le calcul des radicaux.

46. Forme générale de l'équation binôme. — La forme générale de l'équation binôme est : $x^m - P = 0$.

Mais, pour que P, second terme du premier membre, soit complètement caractérisé, il faut distinguer (n° 3) son module et son acception.

Admettons que P soit le module lui-même, c'est-à-dire le *nombre*, entier ou fractionnaire, d'*unités* servant de mesure à la quantité de nature quelconque que l'on considère, et désignons par A la valeur numérique de $\sqrt[m]{P}$, de telle sorte qu'on ait : $P = A^m$.

Son acception sera de forme $\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}$, ou plus généralement $\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}\sqrt{-1}^{\alpha'}$, et l'équation dûment complétée devra s'écrire, en mettant A^m à la place de P :

$$x^m - A^m \sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}\sqrt{-1}^{\alpha'} = 0$$

d'où :

$$x = A \sqrt[m]{\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Les représentations géométriques de cette expression devront être figurées dans la sphère de rayon A et dans le cercle d'inclinaison α'.

Cela dit, on peut évidemment faire abstraction du module et même de l'inclinaison, et se borner à étudier les racines de l'acception principale, c'est à dire $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}}$. — Or, on aura :

$$\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{(\alpha+4k)}} = \sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4k}{m}} = \sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{m}} \times \sqrt{-1}^{\frac{4k}{m}}$$

c'est à dire que les m valeurs de l'expression seront les produits respectifs des m racines m^{e} de l'unité par $\sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{m}}$

Soient, dans le cercle de rayon 1, les m racines principales de l'unité représentée par les m rayons (figurés en *ponctué*) qui aboutissent aux points de divisions de la circonférence :

	1	2	3	$m-1$	m ou 0
Marquons les points	1^{bis}	2^{bis}	3^{bis}	$(m-)^{bis}$	$(m \text{ ou } 0)^{bis}$
tels que les arcs	$(1^{bis}\text{-}1)$,	$(2^{bis}\text{-}2)$,	$(3^{bis}\text{-}3)$,	$[(m-1)^{bis}$	$(m-1)]$, $(m^{bis}\, m)$

soient tous égaux entre eux et à $\frac{\alpha}{m}$.

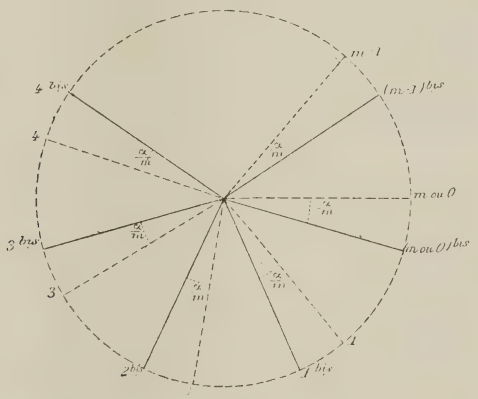


Fig. 29

Les rayons (figurés en *lignes pleines)* qui aboutissent respectivement aux points de division :

1^{bis}	2^{bis}	3^{bis}	$(m-1)^{bis}$	$(m \text{ ou } 0)^{bis}$

seront (n° **31**) la représentation géométrique des produits $\sqrt{-1}^{\frac{4k}{m}} \times \sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{m}}$, pour les m valeurs de k, de 1 à m.

L'irradiation qui représente les *produits* est donc identique avec celle qui représente les *racines* de *l'unité,* sauf la différence angulaire de $\frac{\alpha}{m}$ pour tous les rayons.

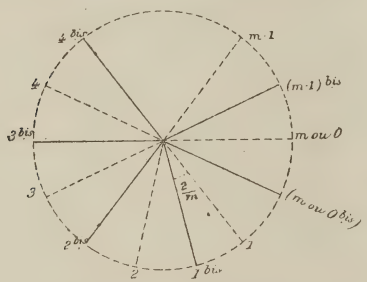
47. Racines de l'unité. — Pour $\alpha = 0$, $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{\alpha+4k}}$ se réduit à

$\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{4k}}$, soit aux racines m^{e} de l'unité *positive*, ou de l'équation $x^m - 1 = 0$.

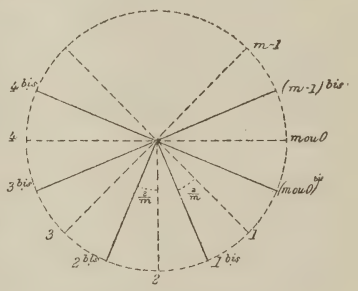
Pour $\alpha = 2$, $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{\alpha+4k}}$ devient $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{2+4k}}$ $\sqrt{\sqrt{-1}^{2} \times \sqrt{-1}^{4k}}$, soit une racine m^{e} de l'unité *négative* ou de l'équation $x^m + 1 = 0$.

L'expression de ces racines est d'ailleurs $\sqrt{-1}^{\frac{2}{m}} \times \sqrt{-1}^{\frac{4k}{m}}$, et il en résulte que les rayons qui les représentent divisent en deux parties égales les angles formés par les rayons qui représentent les racines de même degré de l'unité positive.

Construisons cependant les figures comme au n° 46, pour les deux cas de m impair et de m pair : elles montrent que, dans le premier, l'équation $x^m + 1 = 0$ aura une racine *réelle* (voir n° 4) égale à (-1); que si m est pair, elle n'en aura pas.



m impair. Fig. 30



m pair. Fig. 31

L'ensemble des deux irradiations étant d'ailleurs composé de $2m$ rayons équidistants, représente les racines de l'équation $(x^{2m} - 1 = 0$, dont le premier membre est le produit de ceux des équations élémentaires $(x^m - 1)(x^m + 1) = x^{2m} - 1 = 0$.

48. Propriété des racines de l'unité. — Les propriétés des racines de l'unité telles qu'elles sont exposées en algèbre (voir notamment Lagrange : *Résolution des équations numériques*, note XIII) se déduisent également de leur expression analytique et de leur représentation géométrique consistant dans une irradiation composée, pour le degré m, de m rayons équidistants correspondant à la division de la circonférence en m parties égales.

On suppose les points de division numérotés de 1 à $(m-1)$ dans le sens du mouvement des aiguilles d'une montre, à partir du point 0 ou m correspondant à l'unité positive.

On rappelle (n° 4) que les m racines sont exprimées analytiquement par les termes successifs de la série :

$$\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}, \sqrt{-1}^{2\frac{4}{m}}, \sqrt{-1}^{3\frac{4}{m}}, .. \sqrt{-1}^{k\frac{4}{m}}, .. \sqrt{-1}^{(m-1)\frac{4}{m}}, \left(\sqrt{-1}^{m\frac{4}{m}} = \sqrt{-1}^{4} = 1\right)$$

ou :

$$\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}, \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^2, \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^3, .. \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^k, .. \left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^{m-1}, \left[\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^m = \sqrt{-1}^{4} = 1\right] \quad (a)$$

1° Il résulte de la simple inspection de la série (a) que toutes les racines sont les puissances successives de la première, et qu'elles sont toutes différentes, puisqu'elles ont, géométriquement, des représentations distinctes.

2° Les puissances des racines de l'unité ne peuvent reproduire qu'elles-mêmes : car la racine $\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{m}}\right)^k$ correspondant au point de division numéroté k, ses puissances successsives correspondront aux points de division numérotés par des multiples de k qui rentreront nécessairement dans la série (1, 2.... m), après les avoir diminués, s'il y a lieu, des multiples de m qui pourraient y être contenus.

3° On peut, dans chaque degré m, reproduire toutes les racines de l'unité par les puissances successives de l'une des racines dites *imaginaires*, pourvu que le nombre k qui exprime le rang de cette racine dans la série (a), soit *premier* avec m. (Il s'ensuit que si m est premier, la propriété énoncée appartient à toutes les racines).

Soit une division de rang k, en supposant k premier avec m.

Si on passe successivement de la division 0 aux divisions k, 2 k.., $(m-1)\,k$, mk, on ne pourra retomber sur le point de départ 0 ou mk qu'après un parcours total de mk divisions correspondant

à k circonférences entières : car tout multiple de k inférieur à mk ne sera pas divisible par m.

D'ailleurs, dans ce parcours total composé de m parcours partiels de k divisions chaque, on ne pourra retomber deux fois sur la même division : autrement, entre deux rencontres successives, il y aurait moins de k circonférences entières.

On aura donc rencontré successivement toutes les divisions, au nombre de m, y compris celle de départ : c'est-à-dire qu'on aura reproduit toutes les racines.

4° Lorque k n'est pas premier avec m, soit f, leur plus grand commun diviseur, de telle sorte qu'on ait : $k = fk'$, et $m = fm'$, et que k' et m' soient premiers entre eux.

Alors, en partant de la division 0 ou m, on y reviendra après un parcours de k' circonférences entières, composé de m' parcours partiels, en passant par les divisions :

$$fk',\ 2fk',\ 3fk' \ldots\ (m'-1)fk',\ [m'fk' = (m'f)k' = mk']$$

C'est-à-dire qu'on n'aura reproduit que les m' racines de l'équation de degré m' qui sont en même temps racines de l'équation de degré $m = fm'$; et on ne pourra reproduire les $(m - m')$ autres racines de cette dernière : car (2°), les racines de l'équation de degré m' ne peuvent reproduire qu'elles-mêmes.

5° m étant le degré de l'équation, supposons-le décomposé en facteurs a, b, c, *premiers entre eux deux à deux* (b avec a, c avec b et avec a, etc... Soit par exemple $4.200 = 8 \times 21 \times 25$ et non $4.200 = 14 \times 15 \times 20$. Ou encore : $60 = 4 \times 15$ et non $60 = 6 \times 10$).

L'équation $x^m - 1 = 0$ revient à $x^{abc\ldots} - 1 = 0$, et ses racines sont représentées par une irradiation composée de $abc..$ rayons équidistants.

Supposons d'abord établies les irradiations élémentaires qui représenteraient les racines des équations $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0 \ldots$, et qui sont respectivement composées de a, b, c .. rayons équidistants.

Juxtaposons a fois la deuxième irradiation à la première en partant successivement de chacun des a rayons de celle-ci. Nous obtiendrons une irradiation composée de ab rayons équidistants qui représenteront les racines de l'équation $x^{ab} - 1 = 0$, et chacune de ces racines sera le *produit* de deux racines des équations élémentaires $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$.

Juxtaposons ab fois la troisième irradiation élémentaire à celle-ci en partant successivement de chacun de ses ab rayons. Nous obtiendrons une irradiation composée de abc rayons équidistants, qui représenteront les racines de l'équation $x^{abc} - 1 = 0$, et chacune de ces racines sera le produit de deux des racines des équations $x^{ab} - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$, ou de trois des racines des équations $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$.

Et ainsi de suite.

Il est clair d'ailleurs que, dans cette série d'opérations, l'introduction d'une nouvelle irradiation élémentaire ne saurait donner lieu à aucune coïncidence de rayons, puisque les nombres de divisions de la circonférence, dans chacune des irradiations élémentaires prises deux à deux, sont supposés premiers entre eux : du moment que b est premier avec a, c avec b et a..., c est premier avec ab..., et ainsi de suite.

(Il en serait autrement si ces facteurs n'étaient pas premiers entre eux. Soit par exemple : $m = 60$. — L'irradiation doit avoir 60 rayons équidistants. En posant $60 = 4 \times 15$, l'opération réussit. Mais qu'au contraire, on pose $60 = 6 \times 10$, auquel cas les deux irradiations élémentaires sont composées, l'une de 6, l'autre de 10 rayons équidistants. — Quand on aura juxtaposé la seconde aux trois premiers rayons de la première, on aura obtenu une irradiation composée de 30 rayons équidistants, et en continuant, ou n'aboutira qu'à une superposition de la même figure).

Ainsi, quand $m = abc$... et que a, b, c... sont *premiers entre eux deux à deux*, les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$ ou $x^{abc...} - 1 = 0$ sont les produits des racines des équations élémentaires $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$...

Cette proposition contient, comme cas particulier, celui où a, b, c..., sont des facteurs premiers, et c'est dans ces termes que Lagrange l'a énoncée. (Note XIII, 10).

Il en résulte que la résolution de l'équation $x^{abc} - 1 = 0$ est ramenée à celle des équations $x^a - 1 = 0$, $x^b - 1 = 0$, $x^c - 1 = 0$..., et que ces équations élémentaires seront du moindre degré possible si m a été décomposé en facteurs premiers.

Algébriquement, l'expression générale d'une racine de l'équation $x^{abc} - 1 = 0$ sera, d'après ce qui précède :

$$\sqrt[4]{-1}^{\frac{N}{abc}} = \sqrt[4]{-1}^{\frac{a'}{a}} \times \sqrt[4]{-1}^{\frac{b'}{b}} \times \sqrt[4]{-1}^{\frac{c'}{c}} \ldots = \sqrt[4]{-1}^{\frac{a'bc\ldots + b'ac\ldots + c'ab\ldots + \ldots}{abc}}$$

En faisant successivement dans cette expression ($a' = 1, 2, \ldots a$), ($b' = 1, 2, \ldots b$), ($c' = 1, 2, \ldots c$)..., il est clair qu'on aura $abc\ldots$ valeurs pour N, et que toutes ces valeurs seront différentes.

Car soient :

$$\frac{N'}{abc} = \frac{a'bc\ldots + b'ac\ldots + c'ab\ldots + \ldots}{abc\ldots} \text{ et } \frac{N''}{abc} = \frac{a''bc\ldots + b''ac\ldots + c''ab\ldots + \ldots}{abc\ldots}$$

d'où :

$$\frac{N' - N''}{abc\ldots} = \frac{(a' - a'')bc\ldots + (b' - b'')ac\ldots + (c' - c'')ab\ldots + \ldots}{abc\ldots}$$

La division du numérateur du second membre par le dénominateur ($abc\ldots$) ne peut donner un reste nul : car tous les termes de ce numérateur, sauf le premier, sont divisibles par a : tous, sauf le second, sont divisibles par b, et ainsi de suite.

Donc, on ne peut avoir $N' - N'' = 0$, à moins d'avoir séparément : $a' - a'' = 0$, $b' - b'' = 0$, $c' - c'' = 0$, etc...

6° Reste à examiner le cas où m, degré de l'équation, étant décomposé en facteurs premiers, un ou plusieurs de ces facteurs y entrent à des puissances supérieures à l'unité.

Pour simplifier, supposons tous les facteurs égaux à p et en nombre μ, c'est-à-dire $m = p^{\mu}$.

Toutes les équations élémentaires (5°) se réduisent à $x^{p} - 1 = 0$. Leurs racines seront représentées par la même irradiation, et la juxtaposition d'irradiations identiques ne peut aboutir qu'à leur coïncidence.

Cependant les irradiations qui représentent les racines des équations

$$x^{p} - 1 = 0, \qquad x^{p^{2}} - 1 = 0 \ldots, \quad x^{p^{\mu-1}} - 1 = 0, \qquad x^{p^{\mu}} - 1 = 0$$

doivent se composer respectivement de :

$$p, \qquad p^{2}, \ldots \quad \ldots \quad p^{\mu-1}, \qquad p^{\mu}$$

rayons équidistants, lesquels, respectivement aussi, ont pour expression analytique :

$$\sqrt{-1}^{4\frac{N_1}{p}}, \qquad \sqrt{-1}^{4\frac{N_2}{p^2}}, \ldots \qquad \ldots\ldots \qquad \sqrt{-1}^{4\frac{N_{\mu-1}}{p^{\mu-1}}}, \qquad \sqrt{-1}^{4\frac{N_{\mu}}{p^{\mu}}},$$

les nombres N_1 $N_2 \ldots$ $N_{\mu-1}$, N_{μ}, pouvant respectivement prendre toutes les valeurs :

$$1 \text{ à } p, \qquad 1 \text{ à } p^{2}, \ldots \quad \ldots\ldots \quad 1 \text{ à } p^{\mu-1}, \qquad 1 \text{ à } p^{\mu}.$$

Or, considérons deux irradiations consécutives : au rayon de rang 1 de la première correspond le rayon de rang p de la seconde. —

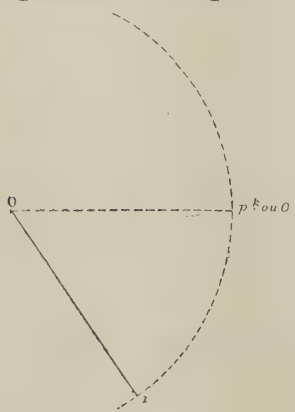


Fig. 32

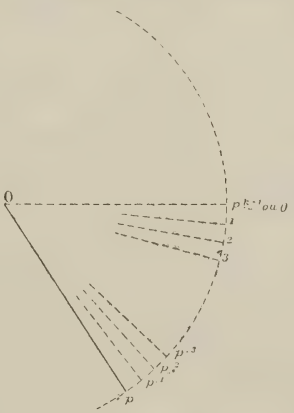


Fig. 33

Et si, à chacun des rayons de rang 1 à p de celle-ci, ou même plus généralement, si à chacun de ses p rayons de rang $(lp+1)$ à $(l+1)p$, on juxtapose la première irradiation, on obtiendra évidemment la seconde.

Il résulte de là qu'en désignant par $n_1, n_2 \ldots n_\mu$ des nombres pouvant recevoir, indépendamment les uns des autres, les valeurs de 1 à p, on pourra écrire, entre les expressions analytiques des racines des équations considérées, les relations suivantes, (il est clair que $n_1 = N_1$) savoir :

Pour l'équation :

$$x^{p^2}-1=0, \quad \ldots \quad \sqrt[p^2]{-1}^{N^2} = \sqrt[p]{-1}^{n_1} \times \sqrt[p^2]{-1}^{n_2}$$

$$x^{p^3}-1=0, \quad \ldots \quad \sqrt[p^3]{-1}^{N_3} = \sqrt[p]{-1}^{n_1} \times \sqrt[p^2]{-1}^{n_2} \times \sqrt[p^3]{-1}^{n_3}$$

$$x^{p^\mu}-1=0, \quad \ldots \quad \sqrt[p^\mu]{-1}^{N_\mu} = \sqrt[p]{-1}^{n_1} \times \sqrt[p^2]{-1}^{n_2} \times \ldots \sqrt[p^{\mu-1}]{-1}^{n_{\mu-1}} \times \sqrt[p^\mu]{-1}^{n_\mu}$$

La dernière de ces relations comprend toutes les autres, en y donnant successivement à μ les valeurs 2, 3,... μ.

Mais chacun des facteurs du second membre est évidemment la racine de degré p de celui qui le précède.

De sorte que si, avec Lagrange, on appelle β une racine de l'équation $x^p - 1 = 0$, et qu'on pose $\beta' = \sqrt[p]{\beta}$, $\beta'' = \sqrt{\beta'}$ ... etc.. les racines de l'équation $x^{p^\mu} - 1 = 0$ auront pour expression générale $(\beta \times \beta' \times \beta'' \times \ldots \times \beta^{\mu-1})$, et que la résolution de cette équation sera ramenée à celle de l'équation $x^9 - 1 = 0$.

Prenons pour exemple très simple l'équation $x^9 - 1 = 0$ ou $x_{3^2} - 1 = 0$.

On sait que les trois racines de l'équation $x^3 - 1 = 0$, ou les trois valeurs de β sont :

$$1, \qquad \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} \qquad \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

Inscrivons-les dans la 1re colonne de gauche du tableau ci-dessous, et écrivons sur la 1re ligne les valeurs de $\beta' = \sqrt[3]{\beta}$. — En formant les produits comme dans la table de Pythagore, nous obtiendrons les neuf racines de l'équation $x^9 - 1 = 0$.

$\beta' = \sqrt[3]{\beta}$	β Col 1	Col 2	Col 3
	1	$\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$	$\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$
	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$
	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}$	$\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}$

(Nota. — Il est clair que, dans les expressions composées, telles que $\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}\right)$, il faut bien se garder de faire passer le premier facteur sous le radical cubique ; car son cube étant égal à l'unité, il n'en resterait plus trace. Mais on sait qu'en algèbre, les racines de l'équation du troisième degré, par exemple, ne se présentent pas sous un autre aspect).

Pour passer de là aux racines de l'équation : $x^{3^3} - 1 = 0$ ou $x^{27} - 1 = 0$, on inscrirait dans la première colonne de gauche du tableau à former, les neuf racines du tableau qui précède, dans l'ordre des colonnes 1, 2 et 3, soient $(\beta\beta')$.

On écrirait sur la première ligne les valeurs de $\beta'' = \sqrt[3]{\beta'}$, savoir :

$$\beta'' = \quad 1, \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}}}, \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}}}$$

puis on formerait les produits comme dans la table de Pythagore, ainsi qu'il vient d'être indiqué.

Et ainsi de suite.

7° La note XIII de Lagrange se termine par les remarques suivantes :

1. — L'équation $x^m - 1$ étant privée du second terme, la somme de ses racines est nulle. Si donc on les représente par $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots \alpha^m$, on a la relation :

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \ldots\ldots + \alpha^{m-1} + \alpha^m = 0$$

Cette conséquence se confirme par le fait que si on compose

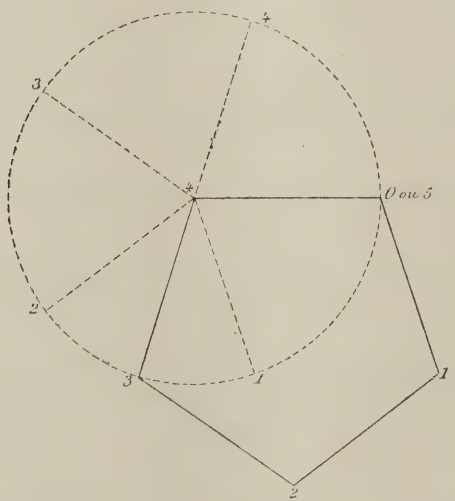


Fig. 34.

géométriquement tous les rayons de l'irradiation qui représente les racines, on obtient un circuit fermé.

2. — Si n est différent de m (et on peut toujours le supposer plus petit, puisque $\alpha^{m+n}=\alpha^m\times\alpha^n=1\times\alpha^n=\alpha^n$), on a également :

$$\alpha^n+\alpha^{2n}+\alpha^{3n}\ldots\ldots+\alpha^{(m-1)n}+\alpha^{mn}=0$$

Car en représentant cette somme par S, on peut encore écrire :

$$\alpha^n(1+\alpha^n+\alpha^{2n}+\ldots.\alpha^{(m-2)n}+\alpha^{(m-1)n})=S$$

Or la parenthèse du premier membre n'est autre chose que la somme S elle-même, puisque le premier terme $1=\alpha^m=\alpha^{mn}$. On a donc :

$$\alpha^nS=S, \text{ ou } (\alpha^n-1)S=0$$

Mais on ne peut avoir $\alpha^n=1$, puisque $\alpha^n=\sqrt{-1}^{4\frac{n}{m}}$ est représenté, dans l'irradiation de m rayons, par le rayon de rang n. — On a donc nécessairemen : $S=0$.

Lagrange remarque enfin qu'on a aussi :

3.— $$\alpha^m+\alpha^{2m}+\alpha^{3m}+\ldots\ldots\ldots\ldots+\alpha^{mn}=m$$

4.— $$\alpha^{m+n}+\alpha^{2(m+n)}+\alpha^{3(m+n)}+\ldots.+\alpha^{m(m+n)}=0$$

Ces deux équivalences sont trop évidentes, d'après ce qui précède, pour qu'il y ait lieu de s'y arrêter.

49. Puisqu'on a vu (n° 48, 5°) que si $m=abc..$, les facteurs $a,bc...$ étant premiers entre eux deux à deux, toutes les racines de l'équation $x^{abc\ldots}-1=0$ sont des produits des racines des équations élémentaires $x^a-1=0$, $x^b-1=0$... on peut se proposer de déterminer les facteurs d'une racine de rang quelconque de l'équation $x^{abc\ldots}-1=0$.

Reprenons l'expression analytique (n° 48, 5°) de cette racine :

$$\sqrt{-1}^{4\frac{a'}{a}}\times\sqrt{-1}^{4\frac{b'}{b}}\times..=\sqrt{-1}^{4\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+..\right)}=\sqrt{-1}^{4\frac{a'bc..+b'ac..+..}{abc..}}=\sqrt{-1}^{4\frac{N}{abc}},$$

en posant : $N=a'bc\ldots+b'ac\ldots+c'ab\ldots$

N étant donné, il s'agit de déterminer $a', b', c' \ldots$ qui sont susceptibles de toutes les valeurs comprises entre 1 et a, entre 1 et b,... en remarquant que les déterminations $a' = a$, $b' = b \ldots$ équivalent à $a' = 0$, $b' = 0 \ldots$: car le facteur $\sqrt{-1}^{4\frac{a'}{a}}$ devient égal à l'unité pour $a' = a$ comme pour $a' = 0$.

Pour déterminer a', par exemple, nous écrirons :

$$N = a' \times bcd \ldots + a'(b'cd \ldots + c'bd \ldots + \ldots)$$

Sous cette forme, on voit que N se compose de deux parties :

1° du produit de $\left(bcd \ldots = \frac{m}{a}\right)$ par a', coefficient cherché.

2° d'un multiple de a.

Si donc de N (augmenté, s'il y a lieu, d'autant de multiples de m qu'il sera nécessaire) on retranche $\left(bcd \ldots = \frac{m}{a}\right)$ autant de fois qu'il faudra pour arriver à un reste multiple de a, le nombre des *soustractions effectuées* sera précisément égal à a'.

Il n'y aura qu'à procéder de même pour trouver $b', c', \ldots$ puisqu'on peut aussi bien écrire :

$$N = b' \times \left(acd \ldots = \frac{m}{b}\right) + b(a'cd \ldots + c'ad \ldots + \ldots)$$

$$N = c' \times \left(abd \ldots = \frac{m}{c}\right) + c(a'bd \ldots + b'ad \ldots + \ldots)$$

Le procédé s'applique d'ailleurs aussi bien au cas où les facteurs $abc \ldots$ de m sont des puissances, telles que $a = a_1^{\alpha}$, $b = b_1^{\beta} \ldots$, puisqu'il suffit que les facteurs soient premiers entre eux deux à deux.

Soit pour exemple $m = 2520 = 2^3 . 3^2 . 5 . 7 = abcd$ et soit N=1. Il faudra évidemment partir, pour les soustractions, de $N + m - 1 + 2520 = 2521$.

On formera le tableau suivant qui s'explique de lui-même.

$a = 2^3 = 8$	$b = 3^2 = 9$	$c = 5$	$d = 7$
$\frac{m}{a} = 315$	$\frac{m}{b} = 280$	$\frac{m}{c} = 504$	$\frac{m}{d} = 360$
2.521	2.521	2.521	2.521
1. −315	1. −280	1. −504	1. −360
2.206	2.241=	2.017	2.161
2. −315	9×249	2. −504	2. −360
1.891		1.513	1.801
3. −315	$b' = 1, \frac{b'}{b} = \frac{1}{9}$	3. −504	3. −360
1.576=		1.009	1.441
8×197		4. −504	4. −360
		505=	1.081
$a' = 3, \frac{a'}{a} = \frac{3}{8}$		5×101	5. −360
			721=
		$c' = 4, \frac{c'}{c} = \frac{4}{5}$	7×103
			$d' = 5, \frac{d'}{d} = \frac{5}{7}$

Vérification : $\frac{3}{8} + \frac{1}{9} + \frac{4}{5} + \frac{5}{7} = \frac{3 \times 315 + 1 \times 280 + 4 \times 504 + 5 \times 360 = 5041}{2.520}$

$$= \frac{1 + (2.520 \times 2)}{2.520} = \frac{N + 2m}{m}$$

La même formule répondrait évidemment à la question *inverse*: Quelle est la *racine* qui correspond aux données :

$$a' = 3, \quad b' = 1, \quad c' = 4, \quad d' = 5 \ldots\ldots ?$$

Ce procédé, cependant, deviendrait très laborieux si m et surtout si ses facteurs étaient des nombres un peu grands.

Encore moins peut-on songer, dans la pratique, à opérer graphiquement, quoique ce soit théoriquement possible, avec une circonférence divisée en m parties égales. — Partant en effet de la division de rang N..., pour trouver a', on rétrograderait succes-

sivement de $\frac{m}{a}$ divisions, en passant par celles de rang $\left(N - \frac{m}{a}\right)$ $\left(N - \frac{2m}{a}\right)$ etc., jusqu'à ce qu'on arrive à une division de rang $\left(N - a'\frac{m}{a}\right)$, exprimée par un multiple de a.

Pour trouver b', on rétrograderait de $\frac{m}{b}$ divisions, jusqu'à ce qu'on arrive à une division de rang $\left(N - b'\frac{m}{b}\right)$, exprimée par un multiple de b. — Et ainsi de suite.

Mais il y a une solution algébrique plus rationnelle.

Reprenons l'équation $N = a'\frac{m}{a} = a'(b'cd + c'bd + \ldots.)$ préparée pour la recherche de a'.

En posant : $b'cd + c'bd + \ldots = q$, cette équation peut s'écrire :

$$N = a'\left(\frac{m}{a}\right) + aq$$

Les quantités N, $\frac{m}{a}$ et a étant connues, il n'y a qu'à la traiter comme une équation indéterminée du premier degré à deux inconnues a' et q ; et elle se résoudra toujours en nombres entiers et positifs, puisque $\frac{m}{a}$ et a sont premiers entre eux. On prendra pour a' la plus petite des valeurs qui satisferont à l'équation.

De même pour b', c', etc.

Quant à la décomposition en facteurs d'une racine de rang N de l'équation $x^{p^\mu} - 1 = 0$, reprenons l'expression générale de cette racine (N° 48, 6°).

$$\sqrt[4]{-1}^{\frac{N}{p^\mu}} = \sqrt[4]{-1}^{\frac{n_1}{p}} \times \sqrt[4]{-1}^{\frac{n^2}{p^2}} \times \ldots \times \sqrt[4]{-1}^{\frac{n_\mu}{p^\mu}}$$

qui peut encore s'écrire :

$$\sqrt[4]{-1}^{\frac{N}{p^\mu}} = \sqrt[4]{-1}^{\left(\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \ldots \frac{n_\mu}{p^\mu}\right)} = \sqrt[4]{-1}^{\frac{n_1 p_{\mu-1} + n_2 p^{\mu-2} + \ldots + n_{\mu-1} p + n_\mu}{p^\mu}}$$

d'où l'on conclut :

$$N = n_1 p^{\mu-1} + n_2 p^{\mu-2} + \ldots + n_{\mu-1} p + n_\mu$$
$$= \left(n_1 p^{\mu-2} + n_2 p^{\mu-3} + \ldots + n_{\mu-1}\right) p + n_\mu$$

Le second membre est de forme $(Ap + n_\mu)$.

Donc n_μ sera le reste de la division de N par p.

A sera le quotient, lui-même de forme $(A'p + n_{\mu-1})$.

Donc $n_{\mu-1}$ sera le reste de la division de A par p.

A' sera le quotient, etc.

Soient pour exemple $p^\mu = 5^4 = 625$, et $N = 517 = n_1 5^3 + n_2 5^2 + n_3 5^1 + n_4$

On a :

$$\begin{aligned} 517 &= 103 \times 5 + 2 & n_4 &= 2 \\ 103 &= 20 \times 5 + 3 & n_3 &= 3 \\ 20 &= 4 \times 5 + 0 & n_2 &= 0 \\ 4 &= 0 \times 5 + 4 & n_1 &= 4 \end{aligned}$$

Vérification :

$$\frac{517}{625} = \frac{4}{5} + \frac{0}{25} + \frac{3}{125} + \frac{2}{625} = \frac{4 \times 125 + 0 + 3 \times 4 + 2 = 500 + 0 + 15 + 2 = 517}{625}$$

La même formule répondrait évidemment à la question *inverse* : Quelle est la *racine* qui correspond aux données :

$$n_1 = 4, \quad n_2 = 0, \quad n_3 = 3, \quad n_4 = 2 \ldots\ldots ?$$

50. — Calcul des radicaux. Multiplication, division, puissances, racines. — Le calcul des radicaux, d'après ce qui précède, ne doit présenter aucune particularité digne de remarque lorsqu'il ne s'agit que de leurs produits, de leurs quotients, de leurs puisssances ou de leurs racines.

Dans ces divers cas, on pourrait d'abord faire abstraction de leurs modules (n° 30). D'autre part, la représentation géométrique

du résultat consistera dans une irradiation régulière de la forme indiquée par la figure 29.

Soient considérés les radicaux :

$$A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}},\quad B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}},\quad C\sqrt{-1}^{\frac{\gamma+4c'}{c}}.$$

Multiplication. — On aura, algébriquement :

$$A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}} \times B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}} \times C\sqrt{-1}^{\frac{\gamma+4c'}{c}}$$

$$= ABC\sqrt{-1}^{\left(\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}\right)}\sqrt{-1}^{4\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\right)}$$

Dans le cercle de rayon ABC, on tracera la direction Om' définie par le facteur $\left(\sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}}\right)$, c'est-à-dire telle que l'arc :

$$mm' = \frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}.$$

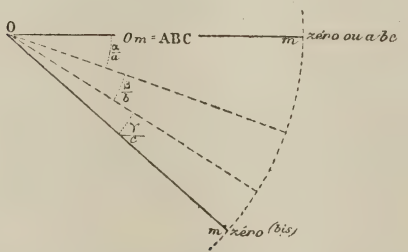


Fig. 35.

Puis, à cette direction, on juxtaposera l'irradiation, composée de *abc* rayons équidistants, définie par le facteur $\sqrt{-1}^{4\left(\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}\right)}$.

Et on aura la représentation géométrique du produit.

Division. — On aura algébriquement :

$$\frac{\mathrm{A}\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}}}{\mathrm{B}\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\sqrt{-1}^{\left(\frac{\alpha+4a'}{a}-\frac{\beta+4b'}{b}\right)}$$

$$= \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}\sqrt{-1}^{\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)} \times \sqrt{-1}^{4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)}$$

Dans le cercle de rayon $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, on tracera la direction Om' définie par le facteur $\sqrt{-1}^{\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)}$, c'est-à-dire telle que l'arc $mm' = \frac{\alpha}{a} - \frac{\beta}{b}$.

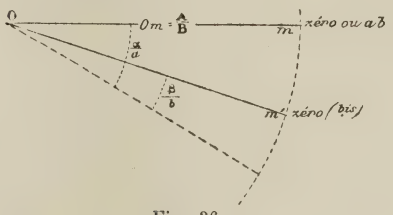


Fig. 36.

Puis à cette direction, on juxtaposera l'irradiation, composée de ab rayons équidisants, définie par le facteur $\sqrt{-1}^{4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)}$.

Puissances. — On aura algébriquement :

$$\left(\mathrm{A}\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}}\right)^n = \mathrm{A}^n\sqrt{-1}^{\frac{\alpha n}{a}} \times \sqrt{-1}^{\frac{4a'n}{a}}$$

Dans le cercle de rayon A^n, on tracera la direction Om' définie par le facteur $\sqrt{-1}^{\frac{\alpha n}{a}}$, telle que l'arc $mm' = n\frac{\alpha}{a}$.

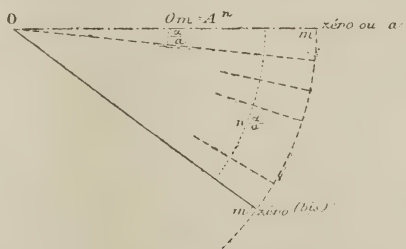


Fig. 37.

Puis à cette direction on juxtaposera l'irradiation, composée de a rayons équidistants définie par le facteur $\sqrt{-1}^{4\frac{a'n}{a}}$.

Racines. — On aura algébriquement :

$$\sqrt[n]{\mathrm{A}\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}}} = \mathrm{A}^{\frac{1}{n}}\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{an}} = \mathrm{A}^{\frac{1}{n}}\sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{an}} \times \sqrt{-1}^{\frac{4a'}{an}}$$

Dans le cercle de rayon $\mathrm{A}^{\frac{1}{n}}$, on tracera la direction Om' définie par le facteur $\sqrt{-1}^{\frac{\alpha}{an}}$, c'est-à-dire telle que l'arc $mm' = \frac{\alpha}{an}$.

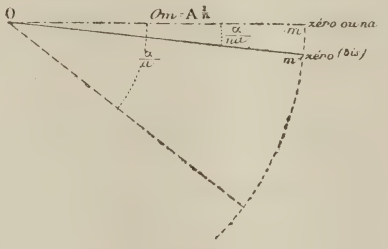


Fig. 38.

Puis à cette direction, on juxtaposera l'irradiation, composée de an rayons équidistants, définie par le facteur $\sqrt{-1}^{\frac{4a'}{an}}$, dans lequel a' devra recevoir toutes les valeurs de 1 à an.

Ainsi, dans les divers cas que l'on vient de passer en revue, il n'y a pour ainsi dire aucun calcul à faire.

Les modules sont invariables dans chacun d'eux.

Quant à l'inclinaison φ qui caractérise l'acception d'un rayon de rang N′ compté à partir de *zéro bis*, on peut immédiatement écrire, N étant le nombre des rayons de l'irradiation.

$$\varphi = \overset{\frown}{mm'} + 4\frac{\mathrm{N}'}{\mathrm{N}}$$

51. — Addition et soustraction. — Il en est autrement, et la figure

ainsi que les calculs deviennent plus compliqués, lorsqu'il s'agit de combiner les radicaux par voie d'*addition* ou de *soustraction*.

Car les résultats sont alors ceux de composition de droites, à la fois simultanées et successives. Ils s'obtiennent, graphiquement de la manière suivante :

La première irradiation, correspondant à $A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}}$, étant figurée dans un cercle de rayon A, les a extrémités de ses a rayons deviennent les centres de la seconde, correspondant à $B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}}$ composée de b rayons équidistants, et qui sera ainsi figurée a fois.

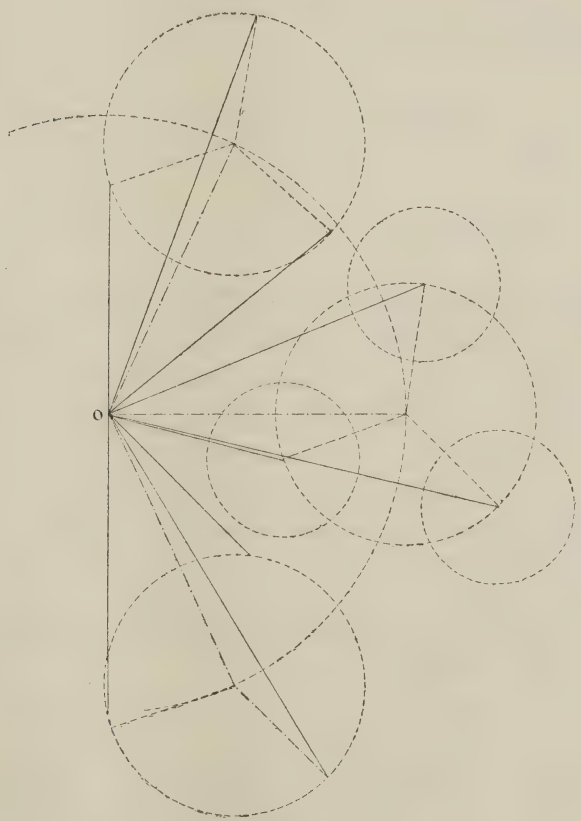


Fig. 39.

En joignant le centre de la première irradiation aux extrémités des rayons de la seconde, on aura ab résultats généralement différents comme grandeur et comme inclinaison, et qui seront la représentation géométrique de la somme $A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}} + B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}}$

Les extrémités des ab résultats, qui d'ailleurs se confondent avec les extrémités des rayons de la seconde irradiation, deviendront les centres de la troisième, correspondant à $C\sqrt{-1}^{\frac{\gamma+4c'}{c}}$ qui sera elle-même répétée ab fois. En joignant le centre de la première irradiation aux extrémités des rayons de la troisième, on obtiendra abc résultats, généralement aussi différents comme grandeur et comme inclinaison, et dont l'ensemble sera la représentation géométrique de la somme

$$A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}} + B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}} + C\sqrt{-1}^{\frac{\gamma+4c'}{c}}$$

Et ainsi de suite.

Si l'un des radicaux doit être retranché, les rayons de l'irradiation correspondante devront être *figurés en sens contraire*.

Si cependant le radical à retrancher est d'indice *pair*, l'irradiation correspondante sera représentée par la même figure, puisque sur $2m$ rayons équidistants, il y en a toujsurs m qui sont le prolongement des m autres. Dans ce cas donc, les résultats de l'introduction de ce radical seront indépendants de son signe : l'ordre seul de ces résultats sera modifié.

Algébriquement, en désignant par $R\sqrt{-1}^{\rho}$ un résultat quelconque, on aura l'équation suivante :

$$R\sqrt{-1}^{\rho} = A\sqrt{-1}^{\frac{\alpha+4a'}{a}} + B\sqrt{-1}^{\frac{\beta+4b'}{b}} + C\ldots$$

dont les orthogonales sont :

$$R\cos\rho = A\cos\frac{\alpha+4a'}{a} + B\cos\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots \qquad (1)$$

$$R\sin\rho = A\sin\frac{\alpha+4a'}{a} + B\sin\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots \qquad (2)$$

On en déduit, en divisant (2) par (1) :

$$\operatorname{tg}\rho = \frac{A\sin\frac{\alpha+4a'}{a} + B\sin\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots}{A\cos\frac{\alpha+4a'}{a} + B\cos\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots}$$

Il est manifeste qu'en faisant varier $a', b', c'\ldots$ on aura $abc\ldots$ valeurs pour l'angle ρ, et par conséquent, au moyen de l'une des équations (1) ou (2), autant de valeurs correspondantes pour R.

Mais on peut aussi obtenir R directement, en carrant et ajoutant ces mêmes équations. On a ainsi :

$$R^2 = \left(A\cos\frac{\alpha+4a'}{a} + B\cos\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots\right)^2 + \left(A\sin\frac{\alpha+4a'}{a} + B\sin\frac{\beta+4b'}{b} + C\ldots\right)^2$$

ou, en développant les opérations et à cause de :

$$\cos^2\left(\frac{\alpha+4a'}{a}\right) + \sin^2\left(\frac{\alpha+4a'}{a}\right) = \cos^2\left(\frac{\beta+4b'}{b}\right) + \sin^2\left(\frac{\beta+4b'}{b}\right) = \ldots = 1$$

et de :

$$\cos\frac{\alpha+4a'}{a}\cos\frac{\beta+4b'}{b} + \sin\frac{\alpha+4a'}{a}\sin\frac{\beta+4b'}{b} = \cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right]$$

$$\cos\frac{\alpha+4a'}{a}\cos\frac{\gamma+4c'}{c} + \sin\frac{\alpha+4a'}{a}\sin\frac{\gamma+4c'}{c} = \cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\gamma}{c}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{c'}{c}\right)\right]$$

. . . . . .

$$\begin{aligned} R^2 = {} & A^2 + B^2 + C^2 + \ldots. \\ & + 2AB\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right] \\ & + 2AC\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\gamma}{c}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{c'}{c}\right)\right] \\ & + 2A. \ldots \\ & + 2BC\cos\left[\left(\frac{\beta}{b}-\frac{\gamma}{c}\right)+4\left(\frac{b'}{b}-\frac{c'}{c}\right)\right] \\ & + \ldots \end{aligned}$$

C'est-à-dire que les *abc* valeurs de R^2 résultent des combinaisons deux à deux des angles qui entrent dans la formule.

Cette formule convient aussi bien au cas où un radical quelconque est à retrancher : il n'y a qu'à changer le signe de son module.

Et il en résulte également, comme on l'a remarqué tout à l'heure que si l'indice de ce radical est pair, l'ensemble des résultats ne change pas.

Il suffit évidemment, pour le faire voir, de considérer le cas de deux radicaux. On aura, suivant que B sera positif ou négatif :

$$R^2=A^2+B^2\pm 2AB\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right]$$

Mais si b est pair, $\frac{b}{2}$ sera entier, et on pourra donner successivement à b' les valeurs b' et $\left(b'+\frac{b}{2}\right)$.

Or, on aura :

$$\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'+\frac{b}{2}}{b}\right)\right]=\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}+\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$=\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)+2\right]\quad=-\cos\left[\left(\frac{\alpha}{a}-\frac{\beta}{b}\right)+4\left(\frac{a'}{a}-\frac{b'}{b}\right)\right]$$

Ainsi le cosinus, et par conséquent le terme où il entre comme facteur, aura toujours deux valeurs égales et de signe contraire. Donc l'ensemble du résultat sera indépendant du signe du module B, ou de celui du radical caractérisé par ce module.

CHAPITRE VI

Interprétation et représentation de fonctions de symboles imaginaires, en géométrie analytique.

52. — Questions traitées par la méthode de Viète : Exemple.

Questions traitées par la méthode de Descartes ou des coordonnées.

53. — Equation à deux variables avec coordonnées rectangulaires.
54. — Application aux formes les plus simples de l'équation du second degré à deux variables.
55. — Equation à deux variables avec coordonnées obliques.
56. — Application à la forme générale de l'équation du second degré à deux variables.
57. — Paradoxes analytiques. — Solution.
58. — Equation à trois variables avec coordonnées rectangulaires.
59. — Application aux formes les plus simples de l'équation du second degré à trois variables.
60. — Equation à trois variables avec coordonnées obliques.
61. — Equation à trois variables. — Cas général.

52. Questions traitées par la méthode de Viète. Exemple. — La mise en équation des questions d'application de l'algèbre à la géométrie traitées par la méthode de Viète ne comportant pas de règles générales, il n'est pas possible de généraliser les conclusions relatives à l'interprétation des résultats qui se présentent sous la forme imaginaire : on ne peut raisonner que sur des exemples. Nous nous contenterons d'en donner un.

Problème. — Déterminer deux quantités dont on connaît la somme $(2a)$ et le produit (κ^2).

Ce sont, comme on sait, les racines de l'équation :

$$x^2 - 2ax + \kappa^2 = 0,$$

d'où :

$$x = a \pm \sqrt{a^2 - \kappa^2}$$

Si l'on a $\kappa < a$, elles sont représentées par les deux segments

OM et BM, ou OM′ et BM′ du diamètre (OB = 2*a*) d'une circonfé-

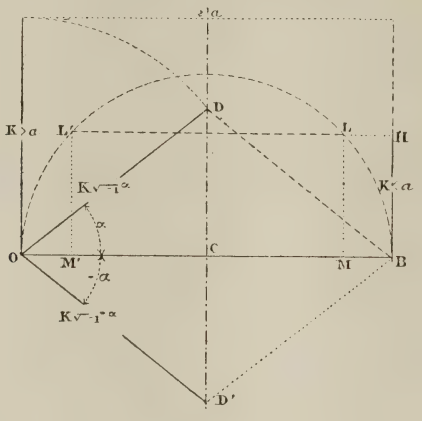


Fig. 40.

rence de cercle dont le point L ou L′ correspond à l'ordonnée :

$$LM = LM' = \kappa.$$

Mais si l'on a $\kappa > a$, les valeurs de x prennent la forme imaginaire :

$$x = a \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{\kappa^2 - a^2}$$

Cela veut dire que les quantités cherchées ne sont pas de même *acception* que a.

D'après les notions que nous avons exposées, elles seront représentées sur la figure par OD et OD′, et auront pour expression analytique $\kappa \sqrt{-1}^{\alpha}$ et $\kappa \sqrt{-1}^{-\alpha}$ avec $tg\,\alpha = \frac{\sqrt{\kappa^2 - a^2}}{a}$

On a bien en effet :

$$[OD + OD' = \kappa\left(\sqrt{-1}^{\alpha} + \sqrt{-1}^{-\alpha}\right) = 2\,\kappa\cos\alpha = 2a$$

$$[OD \times OD' = \kappa^2 . \sqrt{-1}^{\alpha} . \sqrt{-1}^{-\alpha} = \kappa^2 \sqrt{-1}^{\alpha - \alpha = 0} = \kappa^2$$

L'interprétation concrète de la solution imaginaire correspondrait d'ailleurs, par exemple, à la question posée en ces termes :

« *Un voyageur est parti de O, et est parvenu en B en deux étapes,* « *dont le produit est* κ^2, *la plus courte distance entre O et B étant* « $2a$ ».

Si l'on a $\kappa < a$, c'est qu'il est allé en ligne *droite* de O en B, et qu'il s'est arrêté en M (ou en M').

Si l'on a $\kappa > a$, c'est qu'il a suivi la ligne *brisée* ODB ou OD'B.

53.—Questions traitées par la méthode de Descartes. — La mise en équation des questions traitées par la méthode de Descartes, ou des coordonnées, comporte au contraire des règles générales, et on peut également, comme on va le voir, généraliser l'interprétation des résultats qui se présentent sous la forme imaginaire.

Equations à deux variables. — Considérons d'abord une courbe plane représentée par une équation à deux variables, $f(x, y) = o$, rapportées à des axes rectangulaires.

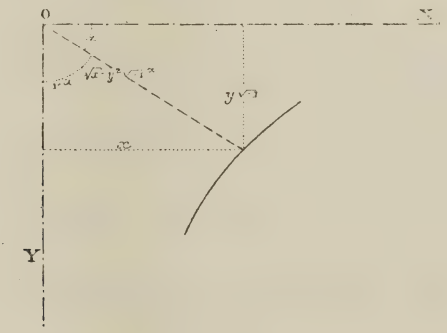


Fig. 41.

La distance de l'origine à un point dont les coordonnées sont x et y a, d'autre part, pour expression analytique.

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{-1}^{\alpha=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$$

Si l'on suppose que de l'équation donnée $f(x, y) = o$, on ait tiré $y^2 = \varphi(x)$, il suffira d'écrire :

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+\varphi(z)}\cdot\sqrt{-1}^{\alpha}$$

pour que cette nouvelle équation caractérise la courbe considérée aussi bien que $f(x,y)=0$.

Cela posé, tant que les valeurs de x seront telles que $\varphi(x)$ demeure positif, les valeurs de y seront réelles et le point dont les coordonnées sont x et y appartiendra effectivement à la courbe.

Mais si une valeur de x rend $\varphi(x)=y^2$ négatif, la valeur de y devenant imaginaire ou de forme $y\sqrt{-1}$, le point dont l'abscisse est x n'appartient pas à la courbe, et pour cette valeur de x l'équation donnée, d'après les idées reçues, ne représentera plus rien.

Remarquons cependant que si, dans le terme $(y\sqrt{-1})$ du premier membre de l'équation analytique, on remplace y par $(y\sqrt{-1})$, le résultat $(y\sqrt{-1}\sqrt{-1})$ équivaut, d'après la règle du N°**23**, à $\left(y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$, c'est-à-dire que y prend une direction perpendiculaire au plan horizontal, ou celle de l'axe des z.

Le premier membre de l'équation analytique doit donc s'écrire $x+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

En même temps, $\left(\text{arc tg}\frac{y}{x}\right)$ devient $\left(\text{arc tg}\frac{y\sqrt{-1}}{x}\right)$ ou bien α devient $\alpha\sqrt{-1}$, c'est à dire que cet arc est situé dans le plan vertical des xz.

Enfin, à cause de $z^2=-y^2=-\varphi x$, l'équation analytique devient :

$$x+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\sqrt{x^2+(z^2=-\varphi x)}\cdot\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}$$

z étant réel pour les mêmes valeurs de x qui rendent y imaginaire, l'équation analytique représente, pour ces valeurs, une courbe située dans le plan des xz.

Quant à l'équation en coordonnées de cette même courbe, il est évident que ce sera, si l'on veut :

$$z^2+\varphi x=0.$$

Mais comme cette forme semblerait impliquer qu'il sera toujours

nécessaire de tirer de l'équation donnée la valeur de y^2, et que cela n'est pas certain, on désignera plus généralement l'équation transformé par $F(x, z\sqrt{-1})=0$, étant entendu que la fonction F doit être telle que son développement ne contienne pas de symboles imaginaires.

On conçoit qu'il ne serait pas permis d'écrire que l'équation transformée sera $f(x, z\sqrt{-1})=0$, à moins que l'équation $f(x,y)=0$ ne contienne que des puissances paires de y.

Cependant, de l'équation $f(x,y)=0$ on peut également tirer $x^2=\psi y$.

Pour les valeurs de y qui rendent (ψy) négatif, x devient de forme $x\sqrt{-1}$, et le premier membre de l'équation analytique prend, au premier abord, la forme $x\sqrt{-1}+y\sqrt{-1}=(x+y)\sqrt{-1}$. Il est bien clair, pourtant, que les deux termes en x et y doivent conserver des acceptions différentes.

Mais cette difficulté n'est qu'apparente : car il suffit de remarquer que l'attribution des acceptions aux deux coordonnées x et y n'a en elle-même rien d'absolu. Elle est essentiellement relative, et on peut tout aussi bien écrire ainsi l'équation analytique :

$$y+x\sqrt{-1}=\sqrt{y^2+x^2}\cdot\sqrt{-1}^{(1-\alpha)=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}}=\sqrt{y^2+\psi y}\cdot\sqrt{-1}^{(1-\alpha)}$$

Quand ψy sera négatif, et que x deviendra $x\sqrt{-1}$, on aura :

$$y+\left(x\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}=z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)=\sqrt{y^2+(z^2=-\psi y)}\cdot\sqrt{-1}^{(1-\alpha)\sqrt{-1}}$$

et cette équation représentera, pour les valeur de y qui rendront z^2 positif ou z réel, une courbe plane située dans le plan des yz, dont l'équation en coordonnées sera : $z^2+\psi y=0$, ou $F(y, z\sqrt{-1})=0$ correspondant à $f(y,x)=0$, c'est-à-dire à l'équation primitive ordonnée par rapport à y.

Il peut enfin arriver que $y^2=\varphi x$ et $x^2=\psi y$ soient négatifs à la fois, quels que soient x et y, c'est-à-dire qu'aucun système de valeurs réelles de x et y ne puisse satisfaire à l'équation $f(x, y)=0$.

Mais alors, le premier membre de l'équation analytique étant d'abord écrit sous l'une des formes :

$$x+y\sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad y+x\sqrt{-1}$$

deviendra $x\sqrt{-1}+(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ ou $y\sqrt{-1}+(x\sqrt{-1})\sqrt{-1}$

c'est-à-dire $y+z\sqrt{-1}\sqrt{-1}$ ou $x+z\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

Et l'équation en coordonnées étant d'abord écrite :

$$f(x.\,y)=0 \qquad \text{ou} \qquad f(y.\,x)=0,$$

les équations transformées correspondantes seront :

$$F(y\sqrt{-1}.z\sqrt{-1})=0 \qquad \text{ou} \qquad F(x\sqrt{-1}.z\sqrt{-1})=0.$$

54. — Application aux formes les plus simples de l'équation du second degré à deux variables.

A. — Soit l'équation de l'*ellipse* rapportée à ses axes principaux :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

1° On en tire en premier lieu $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$, et l'équation analytique correspondante est :

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+\left[y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\right]}.\sqrt{-1}^{\alpha}$$

Pour $x>a$, y^2 est négatif et y imaginaire ; le module du deuxième membre de l'équation analytique revient à :

$$\sqrt{x^2-\left[y^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)\right]}$$

Mais remplaçant y par $z\sqrt{-1}$, y^2 par $-z^2$ et α par $\alpha\sqrt{-1}$, l'équation analytique sera :

$$x+z\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+\left[z^2=b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)\right]}.\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}$$

en même temps que l'équation (1) deviendra :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1 \qquad (2)$$

C'est-à-dire celle d'une *hyperbole* située dans le plan des xz, ayant $2a$ pour axe tranverse et $2b$ pour axe imaginaire.

2° On tire en second lieu de l'équation donnée $x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)$, en même temps qu'on écrit l'équation analytique :

$$y + x\sqrt{-1} = \sqrt{y^2 + \left[x^2 = a^2\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\right]} \cdot \sqrt{-1}^{(1-\alpha)}$$

Pour $y > b$, x^2 est négatif et x imaginaire ; le module du deuxième membre de l'équation analytique revient à $\sqrt{y^2 - \left[x^2 = a^2\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]}$

Remplaçant x par $z\sqrt{-1}$, et x^2 par $-z^2$, l'équation analytique devient :

$$y + z\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{y^2 + \left[z^2 = a^2\left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right)\right]} \cdot \sqrt{-1}^{(1-\alpha)\sqrt{-1}}$$

et l'équation donnée devient :

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{a^2} = 1 \qquad (3)$$

c'est-à-dire celle d'une *hyperbole* située dans le plan des yz, ayant $2b$ pour axe transverse, et $2a$ pour axe imaginaire.

L'équation (3) se déduirait d'ailleurs de (2) en changeant x en y, a en b et réciproquement, comme cela doit être puisque ces quantités entrent symétriquemen dans (1).

B. — En partant de l'équation de l'*hyperbole* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, d'où $y^2 = b^2\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)$, il est manifeste que pour $x < a$ qui rend y^2 né-

gatif, on serait conduit, en sens inverse, à l'*ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1$ située dans le plan des xz, ayant même axe transverse $2a$ que l'hyperbole, et $2b$ pour axe vertical.

Mais il n'y aurait pas double solution, puisqu'aucune valeur de y ne peut rendre négative la valeur $x^2=a^2\left(1+\frac{y^2}{b^2}\right)$.

C. — Soit $f(x,y)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+1=0$, ou $f(x,y)=\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}+1=0$

Aucun système de valeurs réelles des variables n'y peut satisfaire : mais d'après les explications données ci-dessus, il est évident qu'elle a deux transformées qui sont respectivement :

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}-1=0, \quad \text{ou } \frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}-1=0$$

et qui représentent deux *ellipses* : la première située dans le plan des yz a pour axe horizontal $2a$ et pour axe vertical $2b$; la deuxième située dans le plan des xz a pour horizontal $2b$ et pour axe vertical $2a$.

D. — Soit la *parabole* $y^2=2px$. (1)

L'équation analytique sera :

$$x+y\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+2px}.\sqrt{-1}^{\alpha}$$

Pour $x<o$, y^2 est négatif, et y de forme $y\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que y prend la direction des z, et que l'équation analytique devient :

$$x+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\sqrt{x^2-2px}.\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}}$$

en même temps que l'équation donnée devient elle-même :

$$z^2=-2px. \qquad (2)$$

soit celle d'une *parabole* identique avec la première, ayant même forme et même axe, mais dirigée en sens opposée et située dans le plan vertical des xz.

Il n'y a pas à considérer d'autre solution, aucune valeur réelle de y ne pouvant rendre x négatif, ni à plus forte raison imaginaire.

55. — Equation à deux variables avec coordonnées obliques. — Le cas des coordonnées obliques ne diffère pas de celui des coordonnées rectangulaires examiné au n° 53.

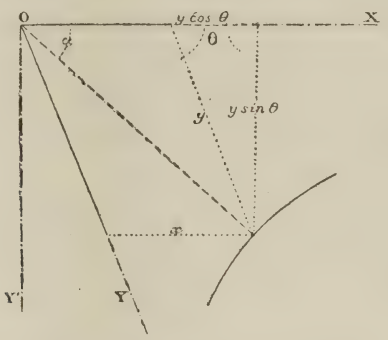


Fig. 42.

Car en appelant θ l'angle des axes, la figure montre que l'équation analytique devra d'abord s'écrire :

$$x+y\sqrt{-1}^{\theta}=\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos\theta}.\sqrt{-1}^{\alpha=\operatorname{arctg}\frac{y\sin\theta}{x+y\cos\theta}} \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Mais on peut la mettre sous la forme :

$$(x+y\cos\theta)+y\sqrt{-1}\sin\theta=\sqrt{(x+y\cos\theta)^2+(y\sin\theta)^2}.\sqrt{-1}^{\alpha} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Et si l'on pose :

$$(x+y\cos\theta)=x' \text{ et } y\sin\theta=y',$$

il vient :

$$x'+y'\sqrt{-1}=\sqrt{x'^2+y'^2}.\sqrt{-1}^{\alpha=\operatorname{arctg}\frac{y'}{x'}} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

c'est-à-dire l'équation analytique de la même courbe rapportée à des axes rectangulaires dont l'un, celui des x', conserve sa direction primitive, tandis que l'autre, celui des y', lui devient perpendiculaire.

Supposons maintenant que l'équation de la courbe étant $f(x,y) = o$, on en tire $y^2 = \varphi x$.

Si certaine valeur de x rend y^2 négatif ou y imaginaire, elle rendra de même imaginaire $(y \sin \theta)$ ou y'. — La représentation de y' devra donc prendre la direction d'un axe des z' perpendiculaire au plan horizontal, en même temps que celle de y sera transportée dans le plan des xz en conservant son inclinaison θ par rapport à l'axe des x, de sorte que sa projection $(y \cos \theta)$ sur cet axe demeure invariable, aussi bien que la valeur de x'.

A cause donc de : $y^2 = \varphi x$ et de : $y'^2 = y^2 \sin^2 \theta = (\varphi x) \sin^2 \theta$, lorsque φx sera négatif et que y'^2 devra être remplacé par $(-z'^2)$, et $(y'\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ par $z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, l'équation analytique deviendra :

$$y' + z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{x'^2 + [z'^2 = -(\varphi x)\sin^2 \theta]}\,\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

L'équation correspondante en coordonnées rectangulaires sera, si l'on veut :

$$z'^2 + (\varphi x)\sin^2 \theta = 0.$$

Mais puisqu'on avait $y' = y \sin \theta$, on a aussi, $z' = z \sin \theta$, c'est-à-dire que l'équation en coordonnées sera, absolument comme dans le cas de coordonnées rectangulaires :

$$z^2 + \varphi x = 0.$$

ou, plus généralement, ainsi qu'on l'a expliqué : $F(x, z\sqrt{-1}) = 0$

En un mot, il n'y a aucune distinction à faire entre les cas des coordonnées obliques ou rectangulaires, et quand une valeur de x rend y^2 négatif, la courbe se redresse de même dans un plan perpendiculaire à son plan primitif, l'axe des x conservant sa direction, et l'axe des y, devenu axe des z, continuant à faire avec l'axe des x le même angle θ, l'équation étant d'ailleurs transformée en y remplaçant y par $z\sqrt{-1}$ après l'avoir préparée de telle sorte qu'elle ne contienne pas de symboles imaginaires après la substitution.

Il va sans dire que l'on peut également intervertir l'ordre des

acceptions. — C'est alors, comme le montre la figure, l'axe des y qui conserve sa direction, tandis que celui des x'' lui devient perpendiculaire.

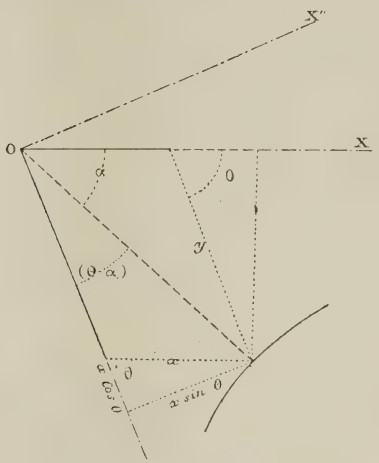


Fig. 43.

En partant de l'équation ordonnée par rapport à y, c'est à dire de $f(y, x) = 0$, et de l'équation analytique :

$$y + x\sqrt{-1}^{\theta} = \sqrt{y^2 + x^2 + 2xy\cos\theta}\,.\sqrt{-1}^{(\theta-\alpha)} = \operatorname{arc\,tg}\frac{x\sin\theta}{y + x\cos\theta}$$

on arrive à l'équation transformée :

$$z^2 + \psi\, y = 0.$$

ou :

$$F(y + z\sqrt{-1}) = 0.$$

représentant en coordonnées obliques, une courbe située dans le plan des yz.

56. — Application à la forme générale de l'équation du second degré à deux variables. — Il suit de là que tout ce qui a été dit au n° 54 au sujet des courbes du second degré rapportées à leurs axes principaux s'applique mot pour mot à l'ellipse ~~et à~~ l'hyperbole

rapportées à leurs diamètres conjugués, ou à la parabole rapportée à une tangente et au diamètre passant par le point de contact.

Il en résulte un moyen simple d'obtenir les équations transformées, lors même que celle de la courbe se présente sous la forme la plus générale de l'équation du second degré à deux variables.

$$ax^2 + 2bxy + a'y^2 + 2cx + 2c'y + d = 0.$$

Considérons d'abord les courbes douées d'un centre. On en détermine les coordonnées, puis on cherche l'équation de la courbe rapportée à ce centre et à deux diamètres conjugués dont l'un parallèle à l'un des axes. — Il y aura deux solutions pour l'ellipse, — deux ou une seule pour l'hyperbole.

Ellipse. — Soit $\frac{X'^2}{A'^2} + \frac{Y'^2}{B'^2} = 1$, l'équation obtenue avec un diamètre parallèle à l'axe des y. — Pour $X' > A'$, Y' sera imaginaire ; la transformée sera $\frac{X'^2}{A'^2} - \frac{(Z'^2 = -Y'^2)}{B'^2} = 1$.

En substituant à X' et Y' leurs expressions en x et y d'après les formules de transformation de coordonnées, et en changeant y en z on aura l'équation de la transformée relevée dans le plan de xz et rapportée à l'origine primitive, au même axe des x et enfin à un axe des z faisant avec celui des x le même angle que l'axe primitif des y.

Soit, en second lieu, $\frac{Y''^2}{B''^2} + \frac{X''^2}{B''^2} = 1$, l'équation obtenue avec un diamètre parallèle à l'axe des x. — Pour $Y'' > B''$, X'' sera imaginaire ; la transformée sera $\frac{Y''^2}{B''^2} - \frac{(Z''^2 = -X''^2)}{A''^2} = 1$.

En substituant à Y'' et X'' leurs expressions en y et x, et changeant x en z, on aura l'équation de la transformée relevée dans le plan des yz, comme ci-dessus.

Hyperbole. — Soient $\frac{X'^2}{A'^2} - \frac{Y'^2}{B'^2} = 1$ l'équation obtenue avec un

diamètre parallèle à l'axe des y, et $\frac{Y''^2}{B''^2} - \frac{X''^2}{A''^2} = 1$, l'équation obtenue avec un diamètre parallèle à l'axe des x.

(Ainsi qu'on l'a remarqué, il pourra n'y avoir qu'une solution, suivant la situation de la courbe par rapport aux axes).

Pour $X' < A'$ dans le premier cas,... pour $Y'' < B''$ dans le second Y', ou X'' sera imaginaire ; Y'^2 ou X''^2 deviendra Z'^2 ou Z''^2, et la transformée sera : $\frac{X'^2}{A'^2} + \frac{(Z^2 = -Y^2)}{B'^2} = 1$, ou $\frac{Y''^2}{B''^2} + \frac{(Z''^2 = -X''^2)}{A'^2} = 1$.

On les traitera comme on l'a dit tout à l'heure, et on aura les équations relevées dans le plan des xz ou des yz.

Ellipse imaginaire. — Soient enfin :

$$\frac{X'^2}{A'^2} + \frac{Y'^2}{B'^2} + 1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{Y''^2}{B''^2} + \frac{X''^2}{A''^2} + 1 = 0.$$

les équations obtenues avec un diamètre parallèle en premier lieu aux y, en second lieu aux x, — et qui ne peuvent être satisfaites par aucun système de valeurs réelles des variables.

Ainsi qu'on l'a vu (n° 54, C), les transformées seront respectivement

$$\frac{(Y'^2 = -X'^2)}{A'^2} + \frac{(Z'^2 = -Y'^2)}{B'^2} = 1 \quad \text{et} \quad \frac{(X''^2 = -Y''^2)}{B''^2} + \frac{Z''^2 = -X''^2}{A''^2} = 1$$

à traiter comme dans les deux premiers cas, pour avoir les transformées de l'équation générale.

Parabole. — Rapportée à une tangente parallèle à l'un des axes primitifs et au diamètre passant par le point de contact, l'équation de la parabole prend, suivant que la tangente sera parallèle aux x ou aux y, l'une des formes :

$$X'^2 = 2p' Y', \qquad \text{ou} \qquad Y''^2 = 2p'' X''.$$

Pour Y' négatif dans le premier cas ou X'' dans le second, X' ou Y'' sera imaginare, et les transformées correspondantes sont (n° 54 D) :

$$(Z'^2 = -X'^2) = 2p' Y', \qquad \text{ou} \qquad (Z''^2 = -Y''^2) = 2p' X''.$$

à traiter comme il a été dit ci-dessus pour avoir les transformées de l'équation générale.

57.—Paradoxes analytiques.—Les considérations d'apres lesquelles on a interprété les solutions imaginaires dans les courbes du second degré, permettent de résoudre divers paradoxes analytiques analogues à celui du n° 42, et qu'on trouve dans le même recueil (*Nouvelles annales de mathématiques*, de MM. Terquem et Gérono).

Premier paradoxe. (Tome VI, 1847, p. 394-483). — « *Une « conique étant rapportée à des axes rectangulaires, si le coeffi- « cient angulaire d'une tangente menée par un point est égal « à* $\sqrt{-1}$, *ce point est un foyer.*

1° Courbes à centre, et d'abord l'*Ellipse*.

L'équation de l'ellipse étant $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$, celle de sa tangente est $a^2yy' + b^2xx' = a^2b^2$, ou $y' = -\frac{b^2x}{a^2y}x' + \frac{b^2}{y}$.

Désignons par α le coefficient angulaire de la tangente :

$$a = -\frac{b^2x}{a^2y}, \quad \alpha^2 = \frac{b^4x^2}{a^4y^2}, \quad b^2x^2 = \frac{a^4}{b^2}\alpha^2y^2.$$

Substituons dans l'équation de la courbe :

$$a^2y^2 + \frac{a^4}{b^2}\alpha^2y^2 = a^2b^2, \quad y^2(b^2 + a^2\alpha^2) = b^4, \frac{b^2}{y} = \pm\sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}$$

Substituons dans l'équation de la tangente :

$$y' = \alpha x' \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}$$

Si maintenant on suppose $\alpha = \sqrt{-1}$, cette équation devient :

$$y' = x'\sqrt{-1} \pm \sqrt{-a^2 + b^2} = -(a^2 - b^2) = -c^2, \text{ ou } y' = (x' \pm c)\sqrt{-1},$$

et elle ne peut être satisfaite qu'autant qu'on a séparément $y' = 0$, et $x' = \pm c$, coordonnées des foyers.

Pour l'*hyperbole* il suffit de changer b^2 en $-b^2$, et l'abscisse des foyers étant $\pm\sqrt{a^2 + b^2}$, la conséquence est la même.

2° *Parabole*, représentée par l'équation $y^2 = 2px$. L'équation de la tangente est $yy' = p(x + x')$, ou $y' = \frac{p}{y}x' + \frac{p}{y}x$.

Désignons par α le coefficient angulaire de la tangente.

$$\alpha = \frac{p}{y}, \qquad y = \frac{p}{\alpha}.$$

Substituons dans l'équation de la courbe :

$$\frac{p^2}{\alpha^2} = 2px, \qquad x = \frac{p^2}{2\alpha^2}.$$

Substituons dans l'équation de la tangente :

$$y' = \alpha x' + \alpha\frac{p}{2\alpha^2} = \alpha x' + \frac{p}{2\alpha}.$$

Si maintenant on suppose $\alpha = \sqrt{-1}$, cette équation devient :

$$y' = x'\sqrt{-1} + \frac{p}{2\sqrt{-1}} = x'\sqrt{-1} - \frac{p}{2}\sqrt{-1} = \sqrt{-1}\left(x' - \frac{p}{2}\right)$$

et elle ne peut être satisfaite qu'autant qu'on a séparément $y' = 0$ et $x' = \frac{p}{2}$, coordonnées du foyer de la parabole.

Second Paradoxe (Tome VI. 1847, p. 271-366). — « *Si, par le « foyer d'une conique*, ON CONÇOIT ANALYTIQUEMENT (?) *deux tangentes « à la conique, les coefficients angulaires de ces tangentes par « rapport à une droite quelconque prise pour axe sont représen- « tés par* $\pm\sqrt{-1}$, *les axes étant rectangulaires* ».

En effet, si dans les équations générales des tangentes aux coniques, établies ci-dessus, c'est-à-dire dans :

$$y' = \alpha x' \pm \sqrt{a^2\alpha^2 + b^2}, \quad \text{ou} \quad y' = \alpha x' + \frac{p}{2\alpha},$$

on substitue les coordonnées des foyers, c'est-à-dire :

$$y' = 0,\ x' = c \qquad \text{ou} \qquad y' = 0,\ x' = \frac{p}{2}$$

on obtient naturellement :

$$\alpha = \pm\sqrt{-1}$$

Supposons maintenant une droite $y = \gamma x + \delta$, c'est-à-dire faisant avec l'axe des x un angle dont la tangente trigonométrique est représentée par γ.

Si l'on appelle φ l'angle compris entre cette droite et les soi-disant tangentes menées par le foyer des coniques, on aura, d'après le prétendu théorème du n° 42, et en vertu de la relation : $\varphi = \text{arc tg } \gamma - \text{arc tg } \alpha$,

$$\text{tg}\,\varphi = \frac{\gamma-\alpha}{1+\alpha\gamma} = \frac{\gamma\mp\sqrt{-1}}{1\pm\gamma\sqrt{-1}} = \frac{\mp\sqrt{-1}+\gamma}{1\pm\gamma\sqrt{-1}} = \frac{\mp\sqrt{-1}\,(1\pm\gamma\sqrt{-1})}{1\pm\gamma\sqrt{-1}} = \mp\sqrt{-1}\,.$$

Cependant de tels résultats, réguliers algébriquement, ne sont susceptibles d'aucune interprétation rationnelle. Voici, d'après notre théorie, comment la question doit être envisagée.

Soit à mener une tangente à l'ellipse par un point donné dans son plan. On peut toujours supposer la courbe rapportée à un système de diamètres conjugués dont l'un, passant par ce point, soit pris pour axe des x, de sorte que l'équation de la courbe étant :

$$a'^2y^2 + b'^2x^2 = a'^2b'^2$$

et celle d'une tangente :

$$a'^2yy' + b'^2xx' = a'^2b'^2$$

cette dernière se réduise pour le point considéré, dont l'ordonnée y' est nulle, à :

$$xx' = a'^2, \quad \text{d'où } x = \frac{a'^2}{x'}.$$

Transportant cette valeur dans l'équation de la courbe, on aura :

$$a'^2y^2 + b'^2\frac{a'^4}{x'^2} = a'^2b'^2, \quad \text{d'où } y^2 = b'^2\left(1-\frac{a'^2}{x'^2}\right)$$

Cela posé, il est manifeste que pour toute valeur de x' comprise entre $+a'$ et $-a'$, c'est-à-dire quand le point donné sera intérieur à la courbe, y sera imaginaire, en même temps que l'on aura $x > a'$ ou $-x < -a'$.

Mais on a vu que, pour de telles valeurs de x, l'ellipse se transforme et devient l'hyperbole, située dans le plan vertical, dont l'équation serait :

$$a'^2z^2 - b'^2x^2 = -a'^2b'^2.$$

Si, dans cette équation, on remplace x par $\frac{a'^2}{x'}$, on a :

$$a'^2z^2 - b'^2\frac{a'^4}{x'^2} = -a'^2b'^2, \quad \text{d'où} \quad z^2 = b'^2\left(\frac{a'^2}{x'^2} - 1\right)$$

c'est-à-dire des valeurs réelles de z pour les valeurs de x' qui rendaient tout à l'heure y imaginaire.

De même pour la *parabole*. On peut toujours la supposer rapportée à un système d'axes conjugués dont l'un parallèle à l'axe principal, passe par le point donné et soit pris pour axe des x, la tangente au point où ce diamètre rencontre la parabole étant prise pour axe des y.

L'équation de la courbe sera : $y^2 = 2p'x$.

L'équation générale de la tangente, $yy' = p'(x + x')$ se réduira pour le point considéré, dont l'ordonnée y' est nulle, à :

$$x + x' = 0, \qquad \text{d'où} \qquad x = -x'$$

Quand x' sera positif, c'est-à-dire quand le point donné sera intérieur à la parabole, x sera négatif et y imaginaire. Mais, dans ce cas, la parabole donnée se transforme et devient, comme on l'a vu, une autre parabole de même paramètre, située dans le plan vertical et dont l'équation serait : $z^2 = -2p'x$, qui donnerait des valeurs réelles de z pour les valeurs négatives de x.

Supposons maintenant le point donné situé sur l'axe principal. Les raisonnements qui précèdent demeurent les mêmes, il n'y a qu'à supprimer les accents de a', b', p'.

Supposons enfin le point donné situé au foyer.

Dans le cas de l'*ellipse*, on aura :

$$x' = \pm\sqrt{a^2-b^2}, \qquad \text{d'où :} \qquad x = \pm\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

On aura, d'autre part :

$$z^2 = b^2\left(\frac{a^2}{a^2-b^2}-1\right) = \frac{b^4}{a^2-b^2} \qquad \text{d'où :} \qquad z = \pm\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Et l'expression générale $\frac{b^2x}{a^2z}$ de la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente avec l'axe des x deviendra :

$$\frac{b^2x}{a^2z} = \pm\frac{b^2}{a^2}\frac{\frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}}{\frac{b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}} = \pm 1, \qquad \text{au lieu de } \sqrt{-1}$$

c'est-à-dire que *deux tangentes menées par le foyer de l'ellipse* à l'hyperbole *conjuguée* sont *inclinées à 45° sur l'axe des x, propriété connue.* La réciproque, pour les tangentes menées par le foyer de l'*hyperbole* à l'ellipse conjuguée, se vérifierait de même.

Dans le cas de la *parabole*, dont l'équation est $z^2 = -2px$, tandis que celle de la tangente est $zz' = -p(x+x')$, ou $z' = -\frac{p}{z}x' - \frac{p}{z}x$, les coordonnées du foyer de la parabole conjuguée ($y^2 = 2px$) étant $z' = 0$ et $x' = \frac{p}{2}$, on a $x = -\frac{p}{2}$, d'où $z = \pm p$.

Et l'expression générale $-\frac{p}{z}$ de la tangente trigonométrique de l'angle formé par la tangente avec l'axe des x deviendra :

$$-\frac{p}{z} = -\frac{p}{\pm p} = \mp 1, \text{ au lieu de } \sqrt{-1}.$$

Ce qui est la traduction de la même propriété géométrique : c'est-à-dire que les *tangentes menées par le foyer d'une parabole à la parabole conjuguée sont inclinées à 45° sur l'axe principal, ou perpendiculaires entre elles.*

Troisième paradoxe (Tome 16. 1857, p. 179-290). Question. — « *Deux cercles concentriques ayant pour rayons R et* $R\sqrt{-1}$ *se coupent à angle droit. Démontrer et expliquer ce résultat d'apparence paradoxale* ».

« Réponse. — *Lorsque deux cercles se coupent à angledroit, on a entre leurs rayons et la droite des centres la relation* $R^2+R'^2=D^2$: « *cette condition est satisfaite ici par* $R^2+(R\sqrt{-1})^2=o$ ».

On ne saurait se contenter d'une telle explication. Voici, suivant nous, l'interprétation que la question comporte.

Quand le rayon du cercle représenté par l'équation : $x^2+y^2=R^2$ devient $(R\sqrt{-1})$, l'équation devient elle-même $x^2+y^2=-R^2$, et elle donne pour x et y des valeurs imaginaires.

Le premier membre de l'équation analytique est alors de la forme : $x\sqrt{-1}+(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}$, c'est-à-dire que x doit prendre la direction de l'axe des y, et y celle de l'axe des z. Mais alors l'équation correspondante, en coordonnées ordinaires, est $y^2+z^2=R^2$, et la question ou la proposition se transforme ainsi :

« *Deux circonférences concentriques et de même rayon, dont les plans sont perpendiculaires entre eux, se coupent à angle droit* ». Ce qui est évident.

58. — Equation à trois variables avec coordonnées rectangulaires. — Passant maintenant aux équations à *trois* variables, considérons une surface représentée par $f(x,y,z)=o$, rapportée d'abord à des axes rectangulaires.

La distance de l'origine à un point dont les coordonnées sont x,y,z a, d'autre part, pour expression analytique :

$$x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,.\,\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

avec $\alpha=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{\sqrt{y^2+z^2}}{x}$, et $\alpha'=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{z}{y}$.

Si on suppose l'équation $f(x,y,z)=o$ résolue successivement par rapport à chaque variable, de telle sorte qu'on ait tiré :

$$x^2=\varphi(y,z)\ ,\quad y^2=\psi(x,z)\ ,\quad z^2=\chi(x,y)$$

il suffira de substituer l'une de ces valeurs dans le second membre de l'équation analytique pour que la surface soit caractérisée, aussi bien que par $f(x, y, z) = o$, par l'une des nouvelles équations dans laquelle le radical serait :

$$\sqrt{\varphi(y,z)+y^2+z^2}\ , \quad \sqrt{x^2+\psi(x,z)+z^2}\ , \quad \sqrt{x^2+y^2+\chi(x,y)}\,.$$

Admettons maintenant que certaines valeurs de y et z, par exemple, rendent $\varphi(y, z) = x^2$ négatif. x sera de forme $x\sqrt{-1}$, et le premier membre de l'équation analytique devenant :

$$x\sqrt{-1}+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

c'est-à-dire contenant deux termes de même acception, il semble que pour les valeurs considérées de y et z l'équation analytique, aussi bien que $f(x, y, z) = o$, ne représentera plus rien.

De même, deux carrés x^2 et y^2 peuvent être à la fois négatifs pour une certaine valeur de z, et le premier membre de l'équation analytique devient :

$$x\sqrt{-1}+(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

et comme $(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ équivaut à $y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ (n° **23**), il y aurait deux termes de même acception. — Pour cette valeur de z, l'équation semblerait aussi ne plus rien représenter.

Enfin, l'équation $f = o$ peut être telle que les trois carrés soient à la fois négatifs, quelque valeur qu'on attribue aux variables. Alors le premier membre de l'équation analytique devient :

$$x\sqrt{-1}+(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}+(z\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$$

I. *Cas de trois carrés négatifs.* — Mais ce dernier cas est facile à interpréter. Car en même temps que $(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}$ équivaut à $\left(y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ (n° **23**), $(z\sqrt{-1})\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ équivaut à $z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$ ou à z, puisque (n° **24**) $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}} = 1$.

Le premier membre de l'équation analytique est donc :

$$x\sqrt{-1} + y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + z,$$

c'est-à-dire que les trois termes sont d'acception différente. Seulement, les valeurs de x devront être portées sur l'axe des y, celles de y sur l'axe de z, celles de z sur l'axe des x.

Et, pour avoir l'équation transformée qui devra correspondre à l'équation donnée . . . . . $f(x, y, z) = 0$

il n'y aura, après avoir préparé celle-ci de telle sorte que la substitution n'y laisse pas subsister de symbole imaginaire, qu'à y remplacer respectivement. x , y , z

par . . . . . $y\sqrt{-1}$, $z\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$

de telle sorte qu'elle devienne . . . $F(y\sqrt{-1}, z\sqrt{-1}, x\sqrt{-1}) = 0$

Il est manifeste que de cette dernière on tirera, pour y^2, z^2 et x^2, des valeurs positives.

Cependant les axes de la surface qu'elle représente auront subi, par rapport à ceux de la surface considérée, une *rotation* autour

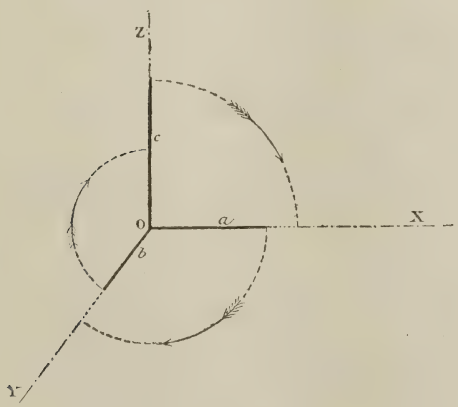


Fig. 44.

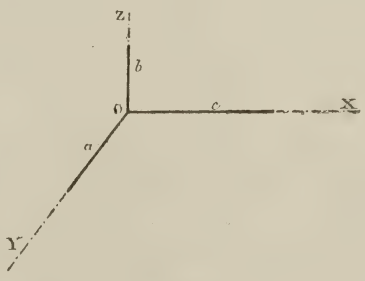


Fig. 45.

de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre, en faisant mouvoir successivement chaque coordonnée dans le plan déterminé par elle-même et par celle qui la suit dans l'ordre alphabétique.

D'où résulte que si l'on suppose, par exemple, que d'après l'équation donnée, les intersections de la surface avec les trois axes aient respectivement pour *valeur absolue*, indépendamment de leur acception ;

$$x=a,\quad y=b,\quad z=c,$$

ces mêmes valeurs, d'après l'équation transformée, deviendront :

$$x=c,\quad y=a,\quad z=b.$$

Il y a d'ailleurs à faire, pour l'équation à trois variables, les mêmes remarques que pour l'équation à deux variables.

Les acceptions respectives de ces variables sont essentiellement relatives. On peut donc aussi les considérer, par exemple, dans l'ordre x, z, y, et écrire ainsi l'équation analytique :

$$x+z\sqrt{-1}+y\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=\sqrt{x^2+z^2+y^2}\cdot\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{(1-\alpha')}}$$

Sans répéter les mêmes raisonnements, il est clair que dans l'hypothèse de trois carrés négatifs, le premiermembre deviendra :

$$x\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+y$$

et que les valeurs de x devront être portées sur l'axe des z, celles de z sur l'axe des y, celles de y sur l'axe de x.

Pour former la nouvelle équation qui devra correspondre à. . . . . $f(x, y, z)=0$
il faudra, après préparation convenable
s'il y a lieu, y remplacer respectivement x , y , z
par . . . . . $z\sqrt{-1}$, $y\sqrt{-1}$, $x\sqrt{-1}$
de sorte que la nouvelle équation sera $F(z\sqrt{-1}, y\sqrt{-1}, x\sqrt{-1})=0$
et que les axes de la surface qu'elle représente auront subi, par rapport à ceux de la surface représentée par l'équation primitive, une *rotation* en sens *inverse* de celle qui a été définie tout à l'heure.

D'où résulte que si l'on suppose, par exemple, que d'après l'équation donnée, les intersections de la surface avec les trois axes

avaient pour *valeur absolue*, indépendamment de leur acception. . . . . $x=a$, $z=c$, $y=b$
les mêmes valeurs, d'après l'équation transformée deviendront . . . . . $x=b$, $z=a$, $y=c$

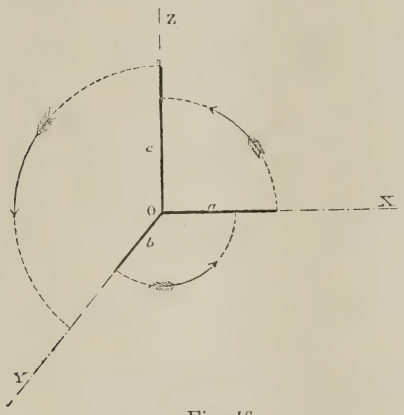


Fig. 46.

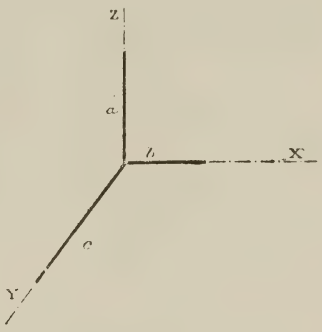


Fig. 47.

Il serait superflu de considérer toutes les permutations, au nombre de *six*, de l'ordre des coordonnées. Car elles rentrent *trois* à *trois* l'une dans l'autre, et ne peuvent donner lieu qu'à *deux* rotations des axes coordonnés, véritablement distinctes :

(x,y,z), (y,z,x), (z,x,y) — 1re rotation, *directe*.
(x,z,y), (z,y,x), (y,x,z) — 2e rotation, *inverse*.

II. *Cas de deux carrés négatifs.* — Supposons x^2 et y^2 rendus simultanément négatifs par une valeur réelle z_1, attribuée à la variable z.

Il en résulte que la *section* de la surface $f(x, y, z) = o$ par un plan horizontal situé à la hauteur z_1, sera *imaginaire*.

Alors l'équation analytique de cette section, écrite sous l'une des deux formes :

$$1^0\ldots\ x+y\sqrt{-1}=\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{-1}^{\alpha},\quad \text{ou}\quad 2^0\ldots\ y+x\sqrt{-1}=\sqrt{y^2+x^2}.\sqrt{-1}^{(1-\alpha)}$$

devra se transformer de telle sorte que le premier membre devienne :

$$1^0\ldots\ x\sqrt{-1}+(y\sqrt{-1})\sqrt{-1}\qquad \text{ou}\qquad 2^0\ldots y\sqrt{-1}+(x\sqrt{-1})\sqrt{-1}$$

soit, en exprimant les nouveaux axes sur lesquels doivent être portées les deux coordonnées :

1°... $y+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ 2°... $x+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$

La nouvelle section, *réelle* cette fois, sera d'ailleurs située à une distance absolue égale à (z_1).

1°...du plan des yz, 2°.. du plan des xz.

D'où résulte que la troisième coordonnée (le z_1 primitif) devra nécessairement être portée :

1°...sur l'axe des x, 2°...sur l'axe des y.

On obtiendra donc les transformées de l'équation primitive, considérée sous ses deux formes :

1°... $f(x, y, z)=0$ 2°... $f(x, z, y)=0$

En remplaçant, dans cette équation convenablement préparée :

1°... $x, y, z,$ 2°... x, z, y

par :

1°... $y\sqrt{-1}, z\sqrt{-1}, x$ 2°... $z\sqrt{-1}, y\sqrt{-1}, x$

et on aura ainsi :

1°... $F(y\sqrt{-1}, z\sqrt{-1}, x)=0$ 2°... $F(z\sqrt{-1}, y\sqrt{-1}, x)=0$

C'est-à-dire que les axes auront subi, comme dans le cas de trois carrés négatifs, la rotation *directe* ou la rotation *inverse* qui ont été décrites.

III. *Cas d'un carré négatif.* — Supposons $z_1^2 = \varphi(x_1, y_1)$ *négatif* ou z_1 *imaginaire*, pour deux valeurs *réelles* x_1 et y_1 attribuées aux variables x et y.

La section correspondante de la surface $f(x, y, z) = o$, par le

plan horizontal $z = z_1$, sera *imaginaire*, comme dans le deuxième cas.

Cependant $z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$ devenu $\left(z_1\sqrt{-1}\right)\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = z_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}$, c'est-à-dire d'acception 1 (N° 24), devra être porté sur l'axe des x, de telle sorte qu'on ait $x_1^2 = (z_1\sqrt{-1})^2 = -z_1^2$.

La section parallèle au plan des yz par le plan $(x = x_1)$, perpendiculaire à l'axe des x, deviendra *réelle*, et on aura pour ses deux autres coordonnées des valeurs y_1 et z_1 respectivement égales aux valeurs x_1 et y_1 qui ont d'abord donné z_1 imaginaire.

De même si l'on considère l'ordre des coordonnées x, z, et y, — x et z réels donnant y^2 négatif et y imaginaire.

On peut donc conclure que, pour obtenir les transformées de l'équation primitive sous les deux formes :

1°... $f(x,y,z)=0$, 2°... $f(x,z,y)=0$

il suffit de remplacer respectivement dans cette équation convenablement préparée :

1°... x, y, z 2°... x, z, y

par :

1°... $y, z, x\sqrt{-1}$ 2°... $z, y, x\sqrt{-1}$

ce qui donnera

1°... $F(y,z,x\sqrt{-1})=0$ 2°... $F(z,y,x\sqrt{-1})=0$

C'est-à-dire que les axes auront subi les mêmes rotations *directe* ou *inverse* que dans les deux premiers cas.

59. — Application de ces principes aux formes les plus simples de l'équation du second degré à trois variables.

I. — Soit l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 1 = 0$, dans laquelle les trois carrés sont toujours négatifs.

En l'écrivant sous les deux formes :

$$1^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1, \qquad 2^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

les transformées seront, d'après ce qu'on a expliqué :

$$1^{o}.\left(\frac{y\sqrt{-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{z\sqrt{-1}}{b}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{-1}}{c}\right)^2=-1, \quad 2^{o}.\left(\frac{z\sqrt{-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{-1}}{c}\right)^2+\left(\frac{x\sqrt{-1}}{b}\right)=-1$$

ou :

$$1^{o}\ldots\ \frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1, \qquad 2^{o}\ldots\ \frac{x^2}{b^2}+\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}=1$$

équations de deux *ellipsoïdes*.

II. — Soit l'équation de l'ellipsoïde, écrite sous deux formes :

$$1^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \qquad 2^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a. On en déduit en premier lieu :

$$1^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{z^2}{c^2}, \qquad 2^{o}\ldots\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}$$

de sorte que (1°) pour $z>c$, et (2°) pour $y>b$, les deux autres carrés sont négatifs.

Les transformées seront, d'après ce qu'on a expliqué :

$$1^{o}\ldots\left(\frac{y\sqrt{-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{z\sqrt{-1}}{b}\right)^2=1-\frac{x^2}{c^2}, \qquad 2^{o}\ldots\left(\frac{z\sqrt{-1}}{a}\right)^2+\left(\frac{y\sqrt{-1}}{c}\right)^2=1-\frac{x_{\text{z}}}{b^2}$$

ou :

$$1^{o}\ldots\ \frac{x^2}{c^2}-\frac{y^2}{a^2}-\frac{z^2}{b^2}=1, \qquad 2^{o}\ldots\ \frac{x^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2}=1$$

équations de deux *hyperboloïdes à deux nappes* dont l'axe transverse est dirigé suivant les x, et dont les trois axes ont d'ailleurs subi, par rapport à ceux de l'ellipsoïde, les rotations indiquées.

b. On déduit en second lieu de l'équation de l'ellipsoïde :

$$1^{o}\ldots\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2},\qquad 2^{o}\ldots\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}$$

de sorte que (1°) pour $x>a$ et $y>b$, et (2°) pour $x>a$ et $z>c$, le troisième carré est négatif.

Les transformées seront, d'après ce qu'on a expliqué :

$$1^{o}\ldots\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}+\left(\frac{x\sqrt{-1}}{c}\right)^2=1,\qquad 2^{o}\ldots\frac{z^2}{a^2}+\frac{y^2}{c^2}+\left(\frac{x\sqrt{-1}}{b}\right)^2=1$$

ou :

$$1^{o}\ldots\left(-\frac{x^2}{c^2}\right)+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,\qquad 2^{o}\ldots\left(-\frac{x^2}{b^2}\right)+\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{a^2}=1$$

équations de deux *hyperboloïdes à une nappe* dont l'axe transverse est dirigé suivant les x, et dont les trois axes ont d'ailleurs subi, par rapport à l'ellipsoïde, les rotations indiquées.

Il est clair qu'on reviendrait inversement de chaque hyperboloïde à l'ellipsoïde.

III. — Soit l'équation du paraboloïde elliptique, écrite sous deux formes :

$$1^{o}\ldots\frac{y^2}{2p}+\frac{z^2}{2p'}=x,\qquad 2^{o},\ldots\frac{z^2}{2p'}+\frac{y^2}{2p}=x.$$

p et p' étant essentiellement positifs.

Pour x négatif, les deux carrés le deviennent en même temps.

Les transformées seront :

$$1^{o}\ldots\frac{(z\sqrt{-1})^2}{2p}+\frac{(x\sqrt{-1})^2}{2p'}=-y,\qquad 2^{o}\ldots\frac{(y\sqrt{-1})^2}{2p'}+\frac{(x\sqrt{-1})^2}{2p}=-z.$$

ou :

$$1^{o}\ldots\frac{z^2}{2p}+\frac{x^2}{2p'}=y,\qquad 2^{o}\ldots\frac{y^2}{2p'}+\frac{x^2}{2p}=z.$$

équation de deux *paraboloïdes elliptiques* dont l'axe est dirigé suivant les y ou les z.

IV. — Pour le paraboloïde hyperbolique dont l'équation est $\frac{y^2}{2p} - \frac{z^2}{2p'} = x$, p et p' étant essentiellement de même signe, la question ne se présente pas, puisque x, y, z peuvent passer par tous les états de grandeur, positive ou négative.

60. — Équation à trois variables avec coordonnées obliques. — Le cas où la surface est rapportée à des coordonnées obliques peut, comme pour les courbes, se ramener à celui de coordonnées rectangulaires.

Désignons par $\widehat{xy}$, $\widehat{xz}$, $\widehat{yz}$ les angles compris entre les axes, et supposons, l'origine ne changeant pas, que l'axe des x reste le même X

que l'axe des y' lui devienne perpendiculaire dans le plan des xy, qui ne variera pas, et qui sera considéré comme horizontal. Y'

que l'axe des z' devienne perpendiculaire auplan horizontal. Z'

L'ensemble des trois axes Ox, Oy, Oz constitue un angle trièdre dont les trois angles plans sont $\widehat{xy}$, $\widehat{xz}$, $\widehat{yz}$.

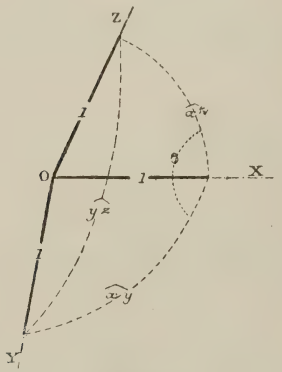


Fig. 48.

Les arcs qui leur servent de mesure sont en même temps les trois côtés d'un triangle sphérique dans lequel l'angle opposé à $\widehat{yz}$ est l'inclinaison du plan des xz sur le plan horizontal. Appelant θ cette inclinaison, elle sera donnée par la formule fondamentale de la trigonométrie sphérique (établie au n° 35, III),

$$\cos \widehat{yz} = \cos \widehat{xy} \cos \widehat{xz} + \sin \widehat{xy} \sin \widehat{xz} \cos \theta.$$

Maintenant, considérons successivement, dans les deux systèmes de coordonnées, le même point M de la surface, caractérisé analytiquement par le rayon vecteur $R\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}\alpha'}$ équivalent, dans chaque système, au contour formé par les trois coordonnées du point M.

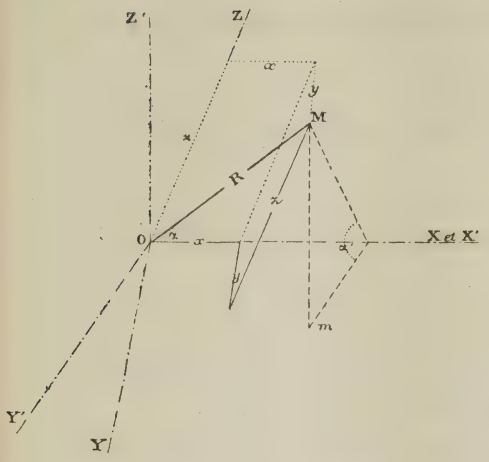


Fig 49.

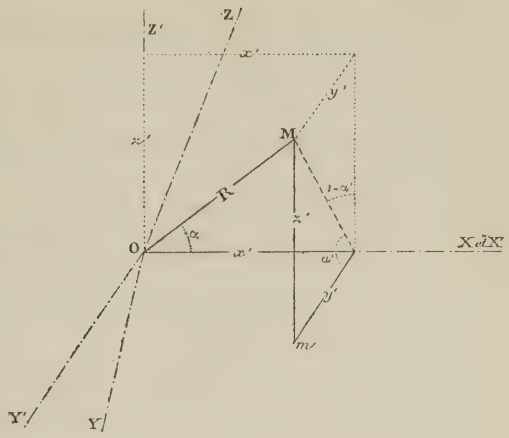


Fig. 50.

Il en résulte qu'on peut écrire l'équivalence de ces deux contours et du rayon vecteur, ou la double équation :

$$x+y\sqrt{-1}^{\widehat{xy}}+z\sqrt{-1}^{\widehat{xz}\sqrt{-1}^{\theta}}=x'+y'\sqrt{-1}+z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=R\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \quad (1)$$

dont le double développement serait :

$$\left.\begin{array}{l} x+y\cos\widehat{xy}+z\cos\widehat{xz} \\ +(y\sin\widehat{xy}+z\sin\widehat{xz}\cos\theta)\sqrt{-1} \\ +z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin xz\sin\theta \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} x' \\ +y'\sqrt{-1} \\ +z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} R\cos\alpha \\ +R\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' \\ +R\sqrt{-1}\sin\alpha\sin\alpha' \end{array}\right\} \quad (2)$$

d'où résultent, pour la transformation des coordonnées, les trois relations :

$$\left.\begin{array}{l} x+y\cos\widehat{xy}+z\cos\widehat{xz}=x', \quad y\sin\widehat{xy}+z\sin\widehat{xz}\cos\theta=y' \\ z\sin xz\sin\theta=z' \end{array}\right\} \quad (3)$$

On en tirerait, inversement et successivement dans l'ordre des z, y et x :

$$\left.\begin{array}{l} z=\dfrac{z'}{\sin\widehat{xz}\sin\theta}, \quad y=\dfrac{y'}{\sin\widehat{xy}}-\dfrac{z'\cos\theta}{\sin\widehat{xy}\sin\theta} \\ x=x'-y'\dfrac{\cos\widehat{xy}}{\sin\widehat{xy}}-z'\left(\dfrac{\cos\widehat{xz}}{\sin\widehat{xz}\sin\theta}-\dfrac{\cos\widehat{xy}\cos\theta}{\sin\widehat{xy}\sin\theta}\right) \end{array}\right\} \quad (4)$$

Comme vérification, on peut faire la somme des carrés des équations (3) :

$$(x+y\cos\widehat{xy}+z\cos\widehat{xz})^2+(y\sin\widehat{xy}+z\sin\widehat{zx}\cos\theta)^2(z\sin\widehat{xz}\sin\theta)^2=x'^2+y'^2+z'$$

qui doit être égale à R^2.

Or le développement du premier membre donne effectivement :

$$x^2+y^2+z^2+2xy\cos\widehat{xy}+2xz\cos\widehat{xz}+2yz[\cos\widehat{xy}\cos\widehat{xz}+\sin\widehat{xy}\sin\widehat{xz}\cos\theta=\cos\widehat{yz}]$$

ce qui est bien, en coordonnées obliques, l'expression de la distance de l'origine à un point dont les coordonnées sont x, y et z.

Il va sans dire d'ailleurs qu'on aurait également à considérer l'autre ordre des coordonnées, et à écrire ainsi la double équation (1) :

$$x+z\sqrt{-1}^{\widehat{xz}}+y\sqrt{-1}^{\widehat{xy}\sqrt{-1}^{\theta}}=x'+z'\sqrt{-1}+y'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}=R\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{(1-\alpha')}} \qquad (1\ bis)$$

On se dispense de la développer.

Supposons maintenant les divers cas considérés au n° 58, par exemple :

x^2 négatif ou x imaginaire pour y^2 et z^2 positifs ou y et z réels.

x^2 et y^2 négatifs ou x et y imaginaires pour z^2 positif ou z réel.

x^2, y^2, z^2 négatifs ou x, y, z, imaginaires à la fois

Il résulte du rapprochement des équations (3) et (4) que x', y', z' seront en même temps que x, y et z, imaginaires ou réels.

(Il est clair que, pour que cette conséquence demeure exacte dans d'autres combinaisons déterminées des carrés supposés négatifs, telles par exemple que y^2 négatif avec x^2 et z^2 positifs, il faudra modifier les acceptions et écrire le premier membre de l'équation analytique dans l'ordre : $y'+x'\sqrt{-1}+z'\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

L'équation de la surface en coordonnées obliques étant :

$$1^{\circ}\ldots\ f(x, y, z)=o \quad \text{ou} \quad 2^{\circ}\ldots\ f(x, z, y)=o$$

son équation en coordonnées rectangulaires sera :

$$1°\ldots\ f_1(x'\,y'\,z')=o \quad \text{ou} \quad 2°\ldots\ f_1(x',z',y')=o.$$

L'interprétation, dans l'hypothèse considérée, se fera, pour les équations $f_1=o$, comme au n° 58 : ainsi dans le premier cas par exemple (x^2 seul négatif), les équations $f_1=o$, convenablement préparées, et après y avoir changé respectivement :

	$1°\ldots\ x', y', z'$	$2°\ldots\ x', z', y'$
en :	$1°\ldots\ y'\sqrt{-1}, z', x'$	$2°\ldots\ z'\sqrt{-1}, y', x'$

deviendront :

$$1°\ldots\ F_1(y'\sqrt{-1},\ z',\ x')=o \quad \text{ou} \quad 2°\ldots\ F_1(z'\sqrt{-1},\ y',\ x')=o.$$

Il ne restera plus qu'à substituer respectivement, dans ces équations :

à $\quad 1°\ldots\ y', z', x' \quad$ ou $\quad 2°\ldots\ z', y', x'$

les valeurs de :

$$1°\ldots\ x', y', z' \quad \text{ou} \quad 2°\ldots\ x', z', y'$$

exprimées en fonction de x, y, z, données par les équations (4), pour avoir, rapportées aux axes primitifs, les équations des surfaces complémentaires.

61. — Cas général. — On a supposé, au début du n° 60, que l'origine des coordonnées restait la même. Cette restriction n'est pas nécessaire ; car il suffit d'admettre que l'équation $f(x,y,z)=o$ a d'abord été remplacée par $f(x_1,\ y_1,\ z_1)=o$ en posant $x=x_1+a$, $y=y_1+b$, $z=z_1+c$, les coordonnées de la nouvelle origine étant désignées par a, b, c. Comme d'ailleurs on pourra toujours interposer entre deux systèmes d'axes quelconques autant de systèmes qu'il le faudra pour les relier l'un à l'autre de la même manière que les deux systèmes voisins comparés tout à l'heure, il est manifeste qu'on peut virtuellement supprimer sous les systèmes intermédiaires, et envisager le cas le plus général, celui de deux systèmes aussi éloignés qu'on voudra l'un de l'autre, en supposant les

coordonnées primitives x, y, z exprimées en fonction de x_n, y_n, z_n, et réciproquement.

Cette considération peut servir, comme dans le cas de deux variables, pour arriver à la préparation convenable des équations f_1 en vue d'en déduire les équations F_1 etc.

Qu'il s'agisse, par exemple, de l'équation générale du deuxième degré à trois variables :

$$ax^2+a'y^2+a''z^2+2byz+2b'xz+2b''xy+cx+c'y+c''z+d=0 \qquad (5)$$

Supposons qu'on ait reconnu qu'elle représente un ellipsoïde. En le rapportant à son centre et à ses axes principaux, son équation deviendra :

$$1^o\ldots \frac{x'^2}{A^2}+\frac{y'^2}{B^2}+\frac{z'^2}{C^3}=1, \qquad \text{ou} \qquad 2^o\ldots \frac{x'^2}{A^2}+\frac{z'^2}{B^2}+\frac{y'^2}{C^2}=1. \qquad (6)$$

A, B, C étant des fonctions des coefficients de l'équation (5), x', y', z', les nouvelles coordonnées courantes, qu'on peut également exprimer en fonction de x, y, z et des mêmes coefficients.

Mais, pour (1^o) $z'>C$ ou pour (2^o) $y'>B$,

les deux autres coordonnées deviennent imaginaires, les transformées des équations (6) seront (n° 59) :

$$1^o\ldots \frac{y'^2}{A^2}-\frac{z'^2}{B^2}+\frac{x'^2}{C^2}=1, \qquad 2^o\ldots \frac{z'^2}{A^2}-\frac{y'^2}{B^2}+\frac{x'^2}{C^2}=1 \qquad (7)$$

En remplaçant, dans les équations (7) :

$$1^o\ldots\ y',\ x',\ z' \qquad 2^o\ldots\ z',\ y',\ x'$$

par leur valeur en fonction de x, y, z, on aura les transformées de l'équation générale (5).

CHAPITRE VII

Mise en équation et résolution des questions de géométrie par la méthode des acceptions.

---

§ 1er. — PROCÉDÉS GÉNÉRAUX

62. — Application directe des équations analytiques aux questions de géométrie.
63. — Représentation des lieux géométriques par les équations analytiques. — Exemple : ligne droite.
64. — Cas général : surfaces. — Leur intersection.
65. — Courbes planes.
66. — Représentation analytique des plans. — Plan d'inclinaison α' et :
1°, passant par l'axe des x.
2°, parallèle à (1°) par un point donné.
3°, passant à l'origine, et de trace $\sqrt{-1}^{a}$.
4°, parallèle à (3°) par un point donné.
Plans définis par d'autres conditions.
67. — Concordance des résultats de la méthode des acceptions avec ceux des deux trigonométries et avec ceux du *procédé directif* de M. Vallès.

§ 2. — QUESTIONS DIVERSES.

68. — *Théorème (dit de Pappus).* — Dans tout quadrilatère inscrit le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.
69. — *Problème.* — Déterminer la plus courte distance de deux droites non situées dans le même plan.
70. — *Problème.* — Joindre deux droites non situées dans le même plan par une droite faisant avec elle des angles donnés.

§ 3. — QUESTIONS SE RATTACHANT A LA THÉORIE.

(*Voir la remarque du n° 44*)

71. — Génération, interprétation et résolution des complications diédrales, ou échelonnages d'exponentielles de $\sqrt{-1}$. — Etablissement géométrique des formules. — Leur vérification par la considération des acceptions.

72. — Interprétation de l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})} = \mathrm{F}^f$. — Sa réduction à la forme : $\mathrm{R}\sqrt{-1}^{\varphi\sqrt{-1}^{\varphi'}} = p+q\sqrt{-1}+r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

I. Cas particulier (traité au n° 10) où x_1+y_1 étant des constantes, on a : $\varphi'=0$, $r=0$.

II. Relation entre les fonctions F et f.

III. Application au cas particulier de $(x^2+y^2=x_1^2+y_1^2=1)$.

73. — Interprétation et réduction de l'expression de forme :

$$\left(x+y\sqrt{-1}+z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\left(x_1+y_1\sqrt{-1}+z_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)} = \mathrm{F}^f$$

74. — Interprétation et réduction de l'expression de forme :

$$\left(\mathrm{F}_n\,\mathrm{F}_{n-1}{}^{\mathrm{F}_{n-2}\,\cdots\,\mathrm{F}_2{}^{\mathrm{F}_1}}\right)$$

§ 1. — PROCÉDÉS GÉNÉRAUX.

62. — Application directe des équations analytiques aux questions de géométrie. — Toute question de géométrie analytique donne lieu, en la supposant résolue, à l'établissement d'une figure dont les points principaux sont ou peuvent être reliés entre eux de manière à former un réseau composé d'éléments *rectilignes*. — Les grandeurs et les directions de ces éléments sont les unes *connues*, les autres *inconnues*; et suivant qu'on les groupe de telle ou telle manière, leur ensemble constitue un certain nombre de contours polygonaux.

Lorsque, d'autre part, les éléments *rectilignes* de ces contours polygonaux ne sont pas tous situés dans un même plan, les points principaux de la figure sont, en général, les sommets d'autant d'angles trièdres ou polyèdres. — Si l'on regarde successivement chacun de ces sommets comme le centre d'une sphère de rayon 1, les intersections des arêtes avec la surface de la sphère déterminent un polygone sphérique dont les côtés sont la mesure des angles, plans, et dont les angles sont la mesure des inclinaisons des faces de l'angle polyèdre. — Ces angles plans et ces inclinaisons, ou les *éléments angulaires* de la figure, sont également des *données* ou des *inconnues* de la question.

Or, on peut considérer chaque contour rectiligne comme le résultat d'une composition de droites, définie (n° 7) par l'équation :

$$\sum\left(A\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)=0 \qquad (1)$$

On peut également considérer chaque polygone sphirique comme le résultat d'une composition d'arcs, symbolisée (n° 41) par l'équation :

$$\left[\sum\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)=0\right] \qquad (2)$$

En développant les équations (1) et (2) de manière à les débarrasser des symboles imaginaires, on obtiendra un ensemble de relations généralement propres à conduire à la solution de la question proposée, sauf à remarquer qu'il se présentera nécessairement deux cas.

1° On aura *autant* d'équations que d'*inconnues*. Alors, ce ne sera plus qu'une affaire de calculs, plus ou moins compliqués, que de déterminer ces inconnues, ou d'éliminer celles dont la détermination serait sans intérêt pour le but qu'on se propose.

2° On aura *moins* d'équations que d'*inconnues*. Alors, en supposant la question déterminée, il faudra chercher à reconnaître, d'après son énoncé et d'après l'examen attentif de la figure, quelles relations peuvent exister entre les inconnues et les données, en vertu de propriétés constatées ou de propositions établies antérieurement. Quand on y sera parvenu, on exprimera ces relations au moyen d'équations de condition : après quoi, il n'y aura plus, comme dans le premier cas, que des calculs à effectuer.

Si cependant on n'aperçoit pas au préalable les relations dont il s'agit, parce que les propriétés ou propositions sur lesquelles elles reposent ne se présenteront pas à propos à l'esprit ou à la mémoire, — et si on ne réussit pas à établir les équations de condition qui seraient nécessaires pour avoir autant d'équations que d'inconnues, on demeurera dans l'embarras, et la *Méthode* ne présentera par elle-même, évidemment, aucune ressource pour en sortir.

D'autre part, daus un cas comme dans l'autre, on reconnaîtra

souvent qu'on serait arrivé plus vite en appliquant directement aux éléments de la figure les formules de la trigonométrie rectiligne et de la trigonométre sphérique. Mais cela n'infirme en rien la valeur théorique de la méthode des acceptions. On a déjà vu d'ailleurs, et on verra encore (n^{os} 68-70) que les équations analytiques se prêtent parfois, avant leur développement, à des transformations avantageuses, de nature à en motiver l'emploi.

63. — Représentation des lieux géométriques par les équations analytiques. — Exemple : La ligne droite.

Lorsqu'on pose l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}},$$

on définit bien un contour triangulaire composé de trois éléments rectilignes de longueurs R, M et A, parallèles à trois directions déminées par leurs symboles d'acception, — l'un de ces éléments dépendant d'ailleurs des deux autres, pour que le contour soit fermé.

Mais si, dans cette relation, on considère A, α et α' comme des variables, ensemble ou séparément, elle représente un lieu géométrique.

Soit par exemple A variable, avec α et α' constants.

C'est l'équation *polaire d'une ligne droite* indéfinie, d'acception $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, passant par l'extrémité (m) de la droite fixe $M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$, et dont $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$ est le rayon vecteur.

Veut-on savoir où cette droite rencontre les trois plans coordonnés ? — Il suffira de faire $\rho' = o$ pour le plan des xy, $\rho' = 1$ pourcelui des xz, $\rho = 1$ pour celui des yz, de même qu'on aurait fait $z = o$, $y = o$ et $x = o$ pour l'équation en coordonnées cartésiennes.

En développant les calculs, on détermine sans peine les longueurs des diverses parties de la droite A entre le point (m) et chacune de

ses traces, ainsi que les valeurs correspondantes du rayon vecteur. — On déterminerait également ses projections, etc.

64.— Cas général. Surfaces : leur intersection. — Laissant provisoirement de côté, pour y revenir tout à l'heure (n° 66) et l'étudier plus complètement, le cas de α' constant avec A et α variables, où il est évident que $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est la génératrice d'un *plan*, considérons le cas le plus général, c'est-à-dire A, α et α' variables à la fois, mais suivant une loi déterminée et définie par une équation telle que $f(A, \alpha, \alpha') = 0$, d'où l'on peut supposer qu'on ait tiré $A = \varphi(\alpha, \alpha')$

On sous-entend, cela va sans dire, les paramètres de même nature que A qui doivent exister dans la fonction (f) et subsister dans la fonction (φ) en vertu du principe de l'homogénéité.

L'équation $f(A, \alpha, \alpha') = o$ est alors l'équation polaire rapportée au pôle (m), extrémité de la droite M, d'une surface qui pourrait être représentée en coordonnées ordinaires et rapportées à la même origine m par une équation telle que $F(x,y,z) = o$ dans laquelle on aurait substitué respectivement aux coordonnées x,y,z, leurs équivalents (n° 8).

$$x = A\cos\alpha, \quad y = A\sin\alpha\cos\alpha', \quad z = A\sin\alpha\sin\alpha'$$

Ainsi dans ce cas, $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ caractérise tous les points de la surface, et A est le rayon vecteur par rapport au pôle m.

Quant à l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

ce serait l'équation polaire rapportée à l'origine O de la ligne M.

Intersection de surfaces. — On peut considérer en même temps une autre surface rapportée à la même origine O :

$$S\sqrt{-1}^{\sigma\sqrt{-1}^{\sigma'}} = L\sqrt{-1}^{\lambda\sqrt{-1}^{\lambda'}} + B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$$

pour laquelle on aurait $B = \psi(\beta,\beta')$, et se proposer de déterminer l'intersection des deux surfaces.

Pour tous les points de cette intersection, les rayons vecteurs R et S seront les mêmes comme grandeur et comme direction. On pourra donc écrire :

$$M\sqrt{-1}^{\mu}\sqrt{-1}^{\mu'} + A\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'} = L\sqrt{-1}^{\lambda}\sqrt{-1}^{\lambda'} + B\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$$

ou encore :

$$M\sqrt{-1}^{\mu}\sqrt{-1}^{\mu'} + \varphi(\alpha,\alpha')\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'} = L\sqrt{-1}^{\lambda}\sqrt{-1}^{\lambda'} + \psi(\beta,\beta')\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$$

En développant cette équation, et égalant dans chaque membre les termes de même acception, on aura trois équations entre les quatre variables α, α', β,β'. — Trois d'entre elles peuvent donc être exprimées en fonctions de la quatrième, et en faisant passer celle-ci par les divers états de grandeur dont elle est susceptible, on obtiendra les points successifs de la courbe d'intersection.

Si ces deux surfaces étaient d'abord rapportées à la même origine (m), L et M disparaissant, l'équation se réduirait à :

$$\varphi(\alpha,\alpha')\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'} = \psi(\beta,\beta')\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$$

Et comme pour tous les points de l'intersection, on devrait avoir $\beta = \alpha$ et $\beta' = \alpha'$, il resterait simplement :

$$\varphi(\alpha,\alpha') = \psi(\alpha,\alpha'),$$

équation caractéristique de la courbe d'intersection.

65.— Courbes planes. —Tout ce qui précède s'applique évidemment à la géométrie plane, en supprimant la troisième coordonnée et l'élément de réflexité dans les symboles d'acception, ce qui ne peut que simplifier les résultats.

Ainsi l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho} = M\sqrt{-1}^{\mu} + A\sqrt{-1}^{\alpha}$$

représente, en premiur lieu, le triangle de la figure ci-contre aux trois côtés, M, A, R.

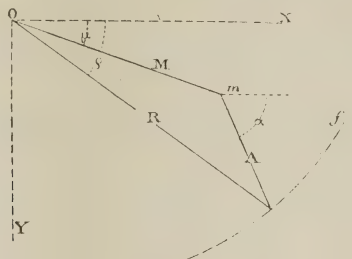


Fig. 51.

Mais si on considère A et α comme variables en même temps et liés par la relation $f(A,\alpha)=0$, d'où l'on tirerait $A = \varphi(\alpha)$, c'est l'équation polaire, rapportée à l'origine O, d'une courbe dont $f(A,\alpha)=0$ serait l'équation polaire rapportée au point m, et qui serait caractérisée par $[A=\varphi(\alpha)]\sqrt{-1}^{\alpha}$, expression de son rayon vecteur, à partir de m.

66.—Représentation analytique des plans. — Nous avons (n° 64) laissé provisoirement de côté le cas de α' constant avec A et α variables, en remarquant que $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est la génératrice d'un plan.

Il y a diverses manières de définir un plan. — L'une d'elles consiste à donner, avec son inclinaison, sa trace sur le plan horizontal, ou la direction de sa trace et un point par lequel le plan doit passer.

1° *Plan passant par l'axe des x.* — Considérons en premier lieu, le plan d'inclinaison α' ayant pour trace horizontale l'axe des x lui-même.

Il est clair que l'équation générale d'un tel plan ne peut admettre d'autres déclivités que α', car les éléments R et M sont, comme A, entièrement contenus dans le plan. — Cette équation est donc :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\alpha'}} = M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\alpha'}} + A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}.$$

et celle du rabattement de la figure sur le plan horizontal, autour de l'axe des x, est évidemment :

$$R\sqrt{-1}^{\rho} = M\sqrt{-1}^{\mu} + A\sqrt{-1}^{\alpha}.$$

Le calcul des éléments de la figure par le procédé du n° 62 ne présente aucune particularité.

Si l'on veut, par exemple, obtenir le point où la génératrice A rencontre l'axe des x, c'est-à-dire la distance R_1 entre l'origine et le

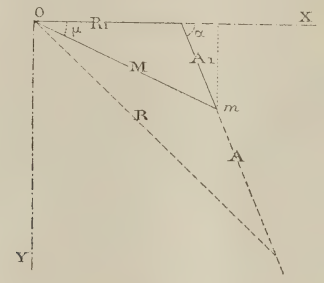


Fig. 52.

point d'intersection, on n'aura qu'à écrire, en désignant par A_1 la longueur de la génératrice comprise entre l'extrémité de M et celle de R_1 :

$$M\sqrt{-1}^{\mu} = R_1 + A_1\sqrt{-1}^{\alpha}$$

le développement donne :

$$M\cos\mu = R_1 + A_1\cos\alpha, \qquad M\sin\mu = A_1\sin\alpha$$

d'où

$$A_1 = \frac{M\sin\mu}{\sin\alpha}, \text{ et } R_1 = M\cos\mu - A_1\cos\alpha,$$

relations qui se lisent immédiatement sur la figure.

2°. *Plan parallèle à l'axe des x.* — Considérons en second lieu, le plan parallèle au précédent, c'est-à-dire d'inclinaison α et de trace horizontale parallèle à l'axe des x, mené par le point m, extrémité de la droite de longueur M et d'acception $\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$, issue de l'origine des coordonnées.

Dans ce cas, ni la droite M, ni le rayon vecteur R ne sont contenus dans le plan dont l'équation conserve alors la forme générale :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$$

Pour avoir la trace même du plan, on cherche celle d'une génératrice.

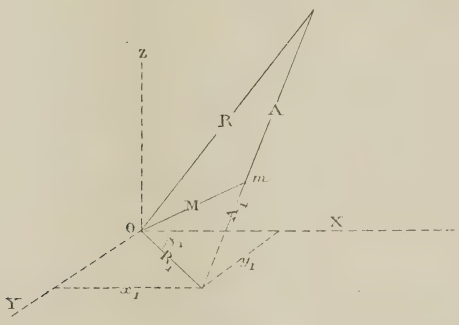


Fig. 53.

La figure montre qu'on devra écrire alors :

$$R_1\sqrt{-1}^{\rho_1} = M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} - A_1\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \quad \ldots\ (1)$$

à développer pour déterminer R_1, ρ_1 et A_1, ce qui donne, en égalant les termes de même acception :

$$R_1\cos\rho_1 = M\cos\mu - A_1\cos\alpha \ldots\ (2)$$
$$R_1\sin\rho_1 = M\sin\mu\cos\mu' - A_1\sin\alpha\cos\alpha' \ldots\ (3)$$
$$0 = M\sin\mu\sin\mu' - A_1\sin\alpha\sin\alpha' \ldots\ (4)$$

La valeur de A_1 se déduit immédiatement de (4), et en la transportant dans (2) et (3), on peut même se dispenser de calculer R_1 et S_1, puisque $R_1\cos\rho_1$ et $R_1\sin\rho_1$ sont précisément les coordonnées x_1 et y_1 de la trace cherchée.

L'acception de la ligne de plus grande pente du plan est d'ailleurs, comme dans le premier cas, $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, c'est-à-dire celle de la génératrice quand on y suppose $\alpha = 1$.

3°. Plan de trace oblique à l'axe des x *et passant par l'origine.* — Considérons, en troisième lieu, le plan toujours d'inclinaison α' et passant à l'origine, mais dont la trace horizontale fait un angle a avec l'axe des x.

Par rapport au premier cas (1°) ci-dessus, les circonstances sont

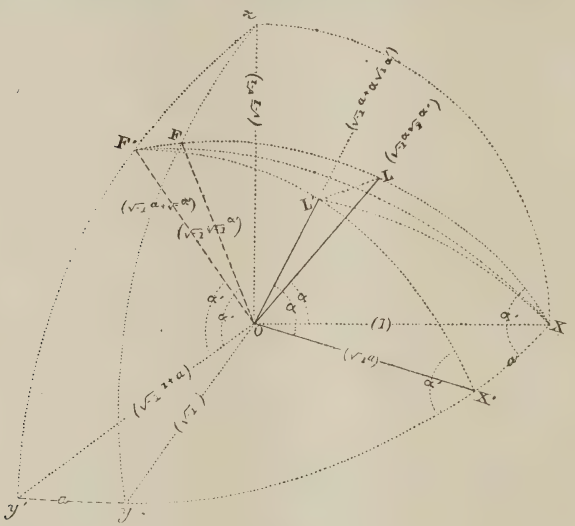


Fig. 54.

les mêmes que si la figure avait tourné d'un angle a autour de l'axe des z, de telle sorte que les points :

X , Y , L , F ,

se fussent transportés respectivement en :

X′ , Y′ , L′ , F′ .

Mais d'après ce qu'on a vu au chapitre IV (n° 36), l'arc XL′ étant la résultante de la composition des arcs (XX′=a) et (X′L′=XL), l'acception de la génératrice OL′ est le produit des acceptions des rayons OX′ et OL ou :

$$\left[\sqrt{-1}^{a} \times \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right]$$

Pareillement, l'arc XF′ étant la résultante de la composition des arcs (XX′$=a$) et (X′F′$=$XF), l'acception de la ligne de plus grande pente OF′ est le produit des acceptions des rayons OX′ et OF, ou :

$$\left[\sqrt{-1}^{\,a} \times \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} = \sqrt{-1}^{\,a+\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}\right]$$

Ainsi qu'on l'a déjà remarqué (1° et 2°), l'acception de la ligne de plus grande pente n'est autre chose que celle de la génératrice quand on y suppose $\alpha=1$.

L'équation analytique de ce plan devra, comme dans le cas (1°), exprimer que les éléments R et M sont, de même que la génératrice A, entièrement contenus dans le plan. Les acceptions de R et de M seront donc de même forme que celle de A, c'est-à-dire qu'on devra écrire :

$$\mathrm{R}\sqrt{-1}^{\,a+\rho\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} = \mathrm{M}\sqrt{-1}^{\,a+\mu\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} + \mathrm{A}\sqrt{-1}^{\,a+\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}.$$

Or ces trois termes ont d'abord un facteur commun $\sqrt{-1}^{\,a}$. Sa suppression équivaut à faire tourner la figure autour de l'axe des z, en substituant le système d'axes X′OY′ au système XOY, et l'équation devient :

$$\mathrm{R}\sqrt{-1}^{\,\rho\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} = \mathrm{M}\sqrt{-1}^{\,\mu\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} + \mathrm{A}\sqrt{-1}^{\,\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}.$$

On est alors ramené au cas ci-dessus (1°).

4° Equation analytique du plan parallèle au précédent, mené par un point donné. — Considérons enfin le plan parallèle au précédent, et mené par l'extrémité m d'une droite $\mathrm{M}\sqrt{-1}^{\,\mu\sqrt{-1}^{\,\mu'}}$ issue elle-même de l'origine. Les éléments R et M étant hors du plan, leurs acceptions deviennent indépendantes. L'équation analytique de ce plan sera donc :

$$\mathrm{R}\sqrt{-1}^{\,\rho\sqrt{-1}^{\,\rho'}} = \mathrm{M}^{\,\mu\sqrt{-1}^{\,\mu'}} + \mathrm{A}^{\,a+\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}$$

Elle contient cinq variables R, ρ, ρ', A et α, entre lesquelles on aura trois équations ; on pourra donc s'en donner deux à volonté pour résoudre les diverses questions concernant le plan considéré lui-même, telles que la détermination de ses intersections avec les trois axes coordonnés, etc.

Puis, si on considère simultanément un autre plan, une autre surface, définis par leurs équations respectives, on les combinera en vue des résultats qu'on se proposera d'obtenir, comme il a été indiqué au n° 64.

Plans définis par d'autres conditions. — Nous avons dit d'ailleurs, au début de ce numéro, qu'il y a diverses manières de définir un plan, et nous sommes partis, comme données, de son inclinaison et de sa trace horizontale, parce qu'elles se prêtent immédiatement à l'emploi des symboles d'acception.

Si les données sont différentes, la marche à suivre par la méthode du n° 62 devra tendre à dégager la valeur de l'inclinaison et la direction de la trace horizontale, pour parvenir à l'équation analytique du plan établie au moyen de ces éléments.

67. — Concordance des résultats de la méthode des acceptions avec ceux des deux trigonomètries et avec ceux du *procédé directif* de M. Vallès.

Nous pourrions confirmer par de nombreux exemples que les résultats de la méthode des acceptions, appliquée comme il vient d'être dit (n^{os} 62-66), sont constamment d'accord avec ceux des deux trigonométries et de la Géométrie descriptive.

Cependant nous nous en référerons encore, à cet égard, à l'ouvrage de M. Vallès déjà cité (n° 45) et intitulé : « *Des formes imaginaires en algèbre* » dont le tome I^{er} (1869) est consacré à la géométrie plane, et le tome III (1876) à la Géométrie dans l'espace.

La notion des *longueurs dirigées* ou le « *procédé directif* » de M. Vallès équivaut en effet à la notion de l'*acception*, et dans le tome I^{er} (p. 251), il a même donné le symbole de l'acception simple sous la forme $\sqrt{-1}^{\frac{2\alpha}{\pi}}$ comme devant *se substituer* au premier mem-

bre de la formule d'Euler; mais il n'en a pas fait usage, et a toujours employé son développement trigonométrique $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)$.

Quant au symbole de l'acception réflexe, il lui a fait complétement défaut, et il n'est parvenu à ses formules, notamment à ce qu'il nomme les « *directifs des plans* » et qui, pour nous, ne sont autre chose que le développement trinôme de l'expression analytique de leur génératrice, que très laborieusement.

Soit, par exemple, le directif du plan passant à l'origine et donné par sa trace horizontale et son inclinaison sur le plan horizontal.

Nos notations sont alors (n° 66-3°) les constantes a, α', et la variable α. Celles de M. Vallès sont respectivement (t. III, p. 159) les constantes α, A et la variable φ.

Nous n'aurons qu'à écrire :

$$\sqrt{-1}^{\,a+\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}} = \sqrt{-1}^{\,a}\cdot\sqrt{-1}^{\,\alpha\sqrt{-1}^{\,\alpha'}}$$

$$= (\cos a + \sqrt{-1}\sin a)(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha.\cos\alpha') + \left(\sqrt{-1}^{\,a}.\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)\sin\alpha.\sin\alpha'$$

M. Vallès parvient à la formule identique :

$$(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha)(\cos\varphi + \sqrt{-1}\sin\varphi.\cos A) + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\varphi\,.\,\sin A$$

mais moins facilement.

Nos résultats n'en sont pas moins d'accord à tous égards avec les siens, et il serait bien superflu de s'arrêter aux questions traitées par lui. En s'y reportant, on apprécie combien l'emploi des symboles d'acception simplifie les solutions.

Nous nous bornerons donc, dans le paragraphe suivant (n°s 68-70), à donner un très petit nombre d'exemples qui ne se trouvent pas dans son ouvrage, et qui offrent quelque intérêt au point de vue des artifices de calcul propres à l'emploi des symboles d'acception.

Le paragraphe 3 contient (n°s 71-74) les quatre questions se rattachant à la théorie, annoncées au n° 44.

§ 2. — QUESTIONS DIVERSES.

68. — Théorême de Pappus. — « *Dans un quadrilatère inscrit, le « produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés « opposés.* »

Il s'agit de démontrer que l'on a, dans la figure 55,... ($lm = ac + bd$).

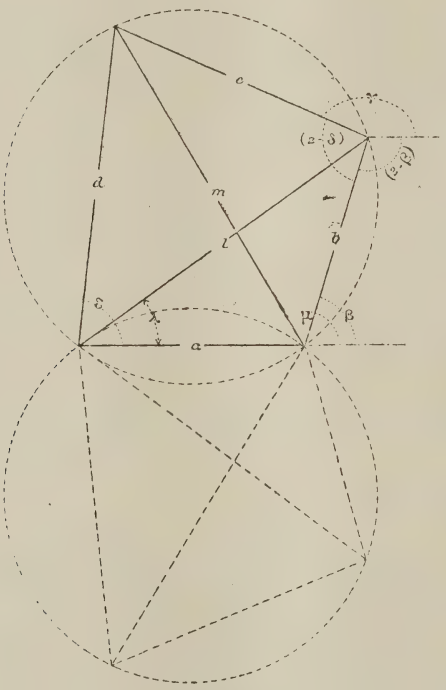


Fig. 55.

Or, en prenant le côté a pour axe des x, on a à la fois :

$$l\sqrt{-1}^{\lambda} = a + b\sqrt{-1}^{\beta} \ldots \qquad (1)$$

$$m\sqrt{-1}^{\mu} = b\sqrt{-1}^{\beta} + c\sqrt{-1}^{\gamma} \ldots \qquad (2$$

d'où, en multipliant membre à membre :

$$lm\sqrt{-1}^{\lambda+\mu}=\left(a+b\sqrt{-1}^{\beta}\right)\left(b\sqrt{-1}^{\beta}+c\sqrt{-1}^{\gamma}\right)$$
$$=\left(a+b\sqrt{-1}^{\beta}+c\sqrt{-1}^{\gamma}\right)b\sqrt{-1}^{\beta}+ac\sqrt{-1}^{\gamma}\ldots \quad (3)$$

Mais on a également, d'après la figure :

$$a+b\sqrt{-1}^{\beta}+c\sqrt{-1}^{\gamma}=d\sqrt{-1}^{\delta}\ldots \quad (4)$$

d'où substituant dans (3) :

$$lm\sqrt{-1}^{\lambda+\mu}=bd\sqrt{-1}^{\beta+\delta}+ac\sqrt{-1}^{\gamma}\ldots \quad (5)$$

Cependant si l'on considère le quadrilatère symétrique construit au-dessous du côté commun a, et dont tous les angles seront négatifs, on aura aussi :

$$lm\sqrt{-1}^{-(\lambda+\mu)}=bd\sqrt{-1}^{-(\beta+\delta)}+ac\sqrt{-1}^{-\gamma}\ldots \quad (6)$$

Multipliant (5) par (6) membre à membre, il viendra :

$$l^2m^2\sqrt{-1}^{0}=b^2d^2\sqrt{-1}^{0}+a^2c^2\sqrt{-1}^{0}+abcd\left[\sqrt{-1}^{(\beta+\delta)-\gamma}+\sqrt{-1}^{\gamma-(\beta+\delta)}\right].(7)$$

Or, on sait que dans le quadrilatère inscrit, les angles opposés sont supplémentaires. — L'angle compris entre les côtés b et c est donc égal à $(2-\delta)$, et de ce que la somme des trois angles figurés autour du point de concours de ces deux côtés est égale à quatre droits, il résulte qu'on a :

$$\gamma-(\beta+\delta)=0.$$

Dès lors, à cause de $\sqrt{-1}^{0}=1$, l'équation (7) se réduit à :

$$l^2m^2=b^2d^2+a^2c^2+2abcd=(bd+ac)^2,$$

Et extrayant la racine carrée des deux memembres :

$$lm=bd+ac.$$

Nous avons choisi cette question parce qu'on y trouve, en premier lieu, l'exemple d'un artifice de calcul d'un usage assez fréquent dans la méthode des acceptions : la multiplication d'une fonction (5) par sa symétrique (6) pour se débarrasser des symboles imaginaires.

En second lieu, parce qu'on y trouve aussi un exemple de la restriction du n° 62 sur la portée de la méthode.

Elle n'aboutirait pas, dans le cas actuel, si l'on ne se souvenait à propos de la propriété caractéristique du quadrilatère inscrit, consistant en ce que les angles opposés sont supplémentaires.

En partant d'ailleurs de cette propriété, on arrive aussi bien au résultat par l'algèbre ordinaire, car la figure donne :

$$l^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{ab}, \qquad l^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{cd}$$

$$\text{d'où } 2\cos\widehat{ab} = \frac{a^2+b^2-l^2}{ab}, \qquad 2\cos\widehat{cd} = \frac{c^2+d^2-l^2}{cd}$$

Mais, d'après la propriété énoncée, on a $\cos\widehat{ab} = -\cos\widehat{cd}$, d'où :

$$\frac{a^2+b^2-l^2}{ab} + \frac{c^2+d^2-l^2}{cd} = 0,$$

et:

$$l^2(ab+cd) = (a^2+b^2)cd + (c^2+d^2)ab$$

On trouvera de même:

$$m^2(ad+bc) = (a^2+d^2)bc + (b^2+c^2)ad$$

Multipliant, réduisant et extrayant la racine carrée des deux membres, on obtient définitivement :

$$lm = ac + bd$$

69. — *Problème.* — **Déterminer la plus courte distance de deux droites non situées dans un même plan.** — (On regarde comme

démontré que cette plus courte distance est la perpendiculaire commune aux deux droites).

Supposons d'abord le cas le plus simple. L'une des deux droites, de longueur A, part de l'origine et est dirigée suivant l'axe des x. L'autre droite, de longueur B, est parallèle au plan horizontal, et s'y projette en vraie grandeur en faisant un angle β avec l'axe des x.

Pour définir la position relative de ces deux droites, on admet

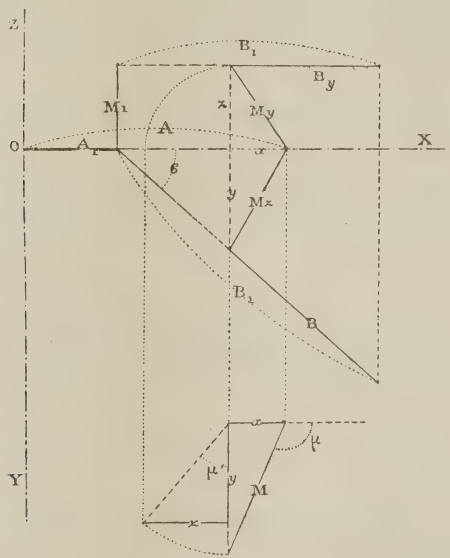


Fig. 56.

que l'extrémité de la longueur A est reliée au point de départ de la longueur B par une droite de longueur M et d'acception $\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$.

Il suit de là que les trois droites déterminent un contour polygonal ouvert, dont l'expression analytique est :

$$A + M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + B\sqrt{-1}^{\beta}.$$

Dans de telles conditions, cependant, il est évident que la plus courte distance est verticale : soit M_1 sa longueur inconnue ; elle aura pour expression analytique $M_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Elle rencontrera la droite A à une distance inconnue (A_1) de l'origine ; la droite B à une distance inconnue (B_1) de son extrémité, et l'ensemble de ces trois lignes déterminera un contour polygonal ouvert dont l'expression analytique sera :

$$A_1+M_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+B_1\sqrt{-1}^{\beta}$$

Mais les deux contours ayant mêmes extrémités, sont équivalents ; l'équation du problème sera donc :

$$A+M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}+B\sqrt{-1}^{\beta}=A_1+M_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+B_1\sqrt{-1}^{\beta}\ldots\quad(1)$$

En la développant et égalant les termes de même acception, elle se partage en trois, qui serviront à déterminer les trois inconnues A_1 M_1 et B_1.

Développement et partage

$$\begin{cases} A+M\cos\mu+B\cos\beta=A_1+B_1\cos\beta\ldots\ldots & (2)\\ M\sin\mu\cos\mu'+B\sin\beta=B_1\sin\beta\ldots\ldots & (3)\\ M\sin\mu\sin\mu'\ldots\ldots=M_1\ldots\ldots & (4)\end{cases}$$

L'équation (4) donne immédiatement M_1 ou la longueur de la plus courte distance.

L'équation (3) donne son point d'intersection avec la droite B, puisqu'on en déduit :

$$(B_1-B)=\frac{M\sin\mu\cos\mu'}{\sin\beta}$$

Et l'équation (2) donne son point d'intersection avec la droite A, puisqu'on en déduit :

$$(A_1-A)=M\cos\mu-(B_1-B)\cos\beta.$$

En se reportant à l'épure et au diagramme correspondant de $M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$, on vérifie que ces trois valeurs résultent effectivement des éléments de la figure.

Or, le cas le plus compliqué peut se ramener au précédent.

Supposons que les longueurs A et B soient respectivement parallèles aux rayons $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ et $\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$ de la sphère unité, et reliées entre elles par une droite $M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$.

On peut toujours, sans diminuer la généralité du problème, admettre que la ligne A commence à l'origine des coordonnées ou au centre de la sphère, car, dans le cas contraire, on n'aurait qu'à transporter les axes parallèlement à eux-mêmes au point de départ de la longueur A.

Le contour polygonal ouvert à considérer aura donc pour expression analytique :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} + M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$$

On lui fera subir les transformations suivantes :

1° Diminuer toutes les inclinaisons de α', de manière à amener la droite A dans le plan horizontal. L'expression analytique du contour deviendra :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha} + M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'-\alpha'}} + B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'-\alpha'}}$$

2°. — Changer les inclinaisons diédrales en longitudes et latitudes pour pouvoir, en diminuant les longitudes de α, amener la droite A à coïncider avec l'axe des x. L'expression analytique du contour deviendra :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha} + M\sqrt{-1}^{m+m'\sqrt{-1}} + B\sqrt{-1}^{b+b'\sqrt{-1}}$$

On obtiendra m, m', b et b' au moyen des formules du n° 35.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} m &= \operatorname{tg}\mu\cos(\mu'-\alpha') \quad , \quad \sin m' = \sin\mu\sin(\mu'-\alpha') \\ \operatorname{tg} b &= \operatorname{tg}\beta\cos(\beta'-\alpha') \quad , \quad \sin b' = \sin\beta\sin(\beta'-\alpha') \end{aligned}$$

3°. — Diminuer les longitudes de α, dans le but indiqué (2°). C'est

une opération légitime, d'après la remarque du n° 43, du moment qu'il ne s'agit que de composition de droites.

L'expression analytique du contour deviendra :

$$A+M\sqrt{-1}^{(m-\alpha)+m'\sqrt{-1}}+B\sqrt{-1}^{(b-\alpha)+b'\sqrt{-1}}.$$

4°. — Revenir aux inclinaisons diédrales, en vue d'amener B dans un plan parallèle au plan horizontal par une nouvelle diminution d'inclinaison ou par une rotation autour de l'axe des x. L'expression analytique du contour deviendra :

$$A+M\sqrt{-1}^{\mu_1\sqrt{-1}^{\mu_1'}}+B\sqrt{-1}^{\beta_1\sqrt{-1}^{\beta_1'}}.$$

On obtiendra μ_1, μ'_1, β_1 et β'_1 au moyen des formules du n° 35.

$$\cos\mu_1=\cos(m-\alpha)\cos m' \quad , \quad \operatorname{tg}\mu_1'=\frac{\operatorname{tg}m'}{\sin(m-\alpha)}$$

$$\cos\beta_1=\cos(b-\alpha)\cos b' \quad , \quad \operatorname{tg}\beta_1'=\frac{\operatorname{tg}b'}{\sin(b-\alpha)}.$$

5°. — Diminuer les inclinaisons de β'_1 dans le but indiqué (4°). L'expression analytique du contour deviendra enfin :

$$A+M\sqrt{-1}^{\mu_1\sqrt{-1}^{\mu_1'-\beta'_1}}+B\sqrt{-1}^{\beta_1},$$

c'est-à-dire qu'elle sera de même forme que dans le premier cas. On n'aura donc qu'à poser :

$$A+M\sqrt{-1}^{\mu_1\sqrt{-1}^{\mu'_1-\beta'_1}}+B\sqrt{-1}^{\beta_1}=A_1+M_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}+B_1\sqrt{-1}^{\beta_1},$$

et le calcul s'achèvera de la même manière.

Pour avoir la direction effective de M_1 dans les conditions pri-

mitives de la question, en désignant par μ_2 et μ'_2 ses inclinaisons caractéristiques, il n'y aura qu'à écrire :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} + M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} = A_1\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} + M_1\sqrt{-1}^{\mu_2\sqrt{-1}^{\mu'_2}} + B_1\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}$$

En développant et partageant, on obtiendra évidemment :

$$\begin{aligned}
M_1\cos\mu_2 &= M\cos\mu - (A_1 - A)\cos\alpha - (B_1 - B)\cos\beta \\
M_1\sin\mu_2\cos\mu'_2 &= M\sin\mu\cos\mu' - (A_1 - A)\sin\alpha\cos\alpha' - (B_1 - B)\sin\beta\cos\beta' \\
M_1\sin\mu_2\sin\mu'_2 &= M\sin\mu\sin\mu' - (A_1 - A)\sin\alpha\sin\alpha' - (B_1 - B)\sin\beta\sin\beta'
\end{aligned}$$

La première de ces trois équations donne immédiatement :

$$\cos\mu_2 = \frac{1}{M_1}\,[M\cos\mu - (A_1 - A)\cos\alpha - (B_1 - B)\cos\beta],$$

et en divisant la troisième par la seconde, on obtiendra :

$$\operatorname{tg}\mu'_2 = \frac{M\sin\mu\sin\mu' - (A_1 - A)\sin\alpha\sin\alpha' - (B_1 - B)\sin\beta\sin\beta'}{M\sin\mu\cos\mu' - (A_1 - A)\sin\alpha\cos\alpha' - (B_1 - B)\sin\beta\cos\beta'}$$

Il est d'ailleurs à peine besoin de faire remarquer qu'il y a une évidente analogie entre les transformations analytiques dont on vient de faire usage, et le procédé de la géométrie descriptive qui consiste dans le changement des plans de projection.

70. — *Problème.* — Joindre deux droites non situées dans le même plan par une droite faisant avec elles des angles donnés.

[C'est la généralisation du problème de la *plus courte distance* (n° 69), où les *angles donnés sont droits.*]

Supposons les données ramenées préalablement au cas le plus simple, c'est-à-dire à celui où elles sont définies par le contour polygonal ouvert ayant pour expression analytique :

$$A + M\sqrt{-1}^{\mu}\sqrt{-1}^{\mu'} + B\sqrt{-1}^{\beta}.$$

Remarquons que β est justement l'angle compris entre les di-

rections de A et de B, et menons par l'origine une parallèle à B : elle sera nécessairement comprise dans le plan horizontal.

En désignant par γ l'angle de la droite cherchée avec A et par δ l'angle de cette même droite avec B, il est clair que sa direction sera celle de l'intersection de deux cônes dont le sommet commun serait à l'origine, dont les axes seraient A et la parallèle à B, et dont les angles au sommet seraient 2γ et 2δ.

Ces cônes se couperont suivant deux génératrices, l'une au dessus, l'autre au-dessous du plan horizontal. Il y aura deux solutions, pourvu que les angles β, γ et δ satisfassent à la condition connue, que chacun soit plus petit que la somme et plus grand que la différence des deux autres.

Graphiquement, on commence par établir sur la figure la plus courte distance des deux droites, comme au n° 69.

A gauche de l'origine, on exécute l'épure de l'angle trièdre dont les angles plans sont donnés.

Dans le cercle de rayon arbitraire OA, l'angle AOB $= \beta$ est situé dans le plan horizontal ; les angles AOC $= \gamma$ et BOD $= \delta$ y sont rabattus. — Par le relèvement autour de OA et OB, les points (C-D) se projettent en E et déterminent la direction unique de la projection OE des deux génératrices communes aux deux cônes, dont les arêtes OC et OD se confondent dans le relèvement. — Ces mêmes génératrices se rabattent de nouveau en OC′ = OD′ autour de OE, de telle sorte que (EC′ = ED′) mesure la hauteur des points (C-D) au-dessus du plan horizontal.

Prenons (EC″ = ED″) = (E′C‴ = E′D‴) = la plus courte distance, OE′ est la projection horizontale des parallèles aux deux lignes de jonction menées par l'origine ; OC‴ = OD‴ est la vraie grandeur des lignes de jonction.

Première solution. — (Oe_1 — Oe'_1) sont les projections de la parallèle à la première solution ; en les reportant en ($O_1\,\varepsilon_1$ — $O\varepsilon'_1$), elles sont en situation.

Deuxième solution. — (OE′—Oe'_2) sont les projections de la pa-

rallèle à la deuxième solution ; en les reportant en $(O_2\varepsilon_2 — O_2\,\varepsilon'_2)$, elles sont en situation.

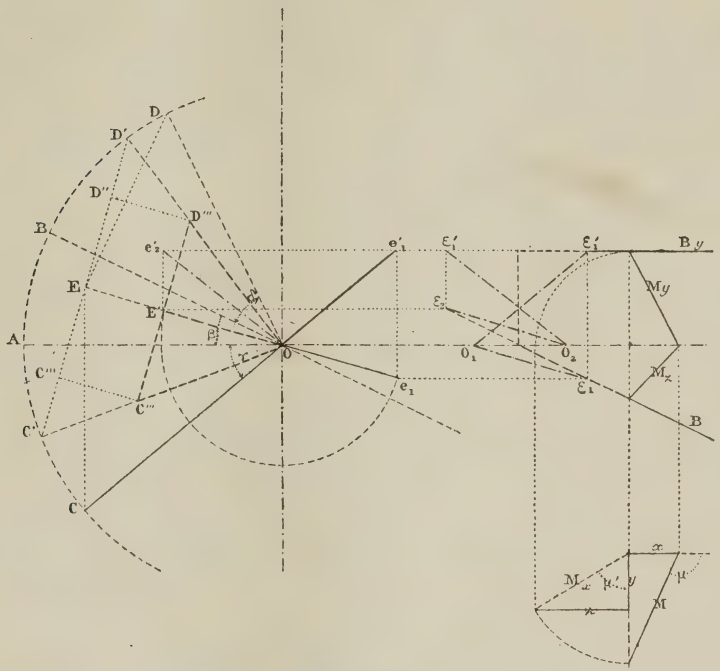


Fig. 57

On voit que les deux lignes de jonction, de même longueur, sont en outre symétriques par rapport à la plus courte distance.

Analytiquement, il n'y aura qu'à égaler successivement, à l'expression donnée du contour polygonal, chacune des nouvelles expressions correspondant à chaque solution, en fonction des longueurs et des angles qui les caractérisent.

D'après la figure perspective ci-aprés, (fig. 58), les directions des trois arêtes de l'angle trièdre étant Oa et Ob avec Om_1 ou Om_2, l'expression de la troisième arête sera :

dans le premier cas $(Om_1)\ldots\ldots\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}$

dans le second cas (Om_2)..... $\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{-\gamma'}}$

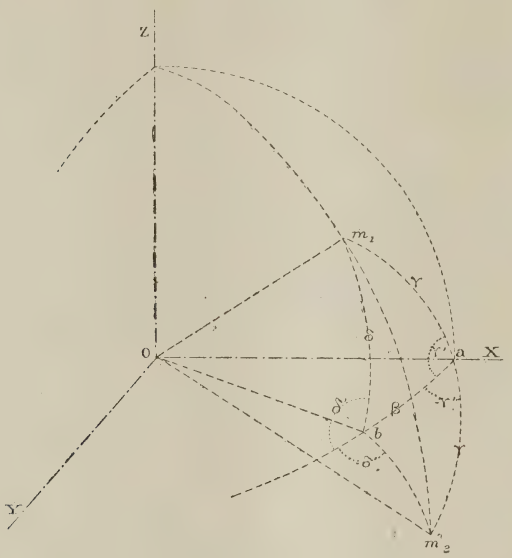


Fig. 58.

On aura donc à traiter les équations :

1er *cas*. $A+M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}+B\sqrt{-1}^{\beta}=A_1+M_1\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}+B_1\sqrt{-1}^{\beta}$... (1)

2e *cas*: $A+M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}+B\sqrt{-1}^{\beta}=A_2+M_2\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{-\gamma'}}+B_2\sqrt{-1}^{\beta}$.. (1)*bis*

On va voir d'ailleurs qu'en fait, un seul calcul donne les deux solutions.

Considérons le premier cas, c'est-à-dire l'équation. (1)

Le second membre contient un angle γ' qui n'est pas connu, ce qui est naturel puisqu'on n'a pas fait usage, pour poser les équations, de l'élément δ, c'est-à-dire du troisième angle plan de l'angle trièdre.

Mais, d'après ce qui a été expliqué au n° 36, on peut écrire l'équation symbolique :

$$\left[\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}} = \sqrt{-1}^{\beta} \times \sqrt{-1}^{\delta\sqrt{-1}^{\delta'}}\right]\ldots \quad (2)$$

qui se développe ainsi :

$$\cos\gamma + \sqrt{-1}\sin\gamma\cos\gamma' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\gamma\sin\gamma' =$$
$$= \left[(\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)(\cos\delta + \sqrt{-1}\sin\delta\cos\delta') + \sqrt{-1}^{\beta+\sqrt{-1}\sin\delta\sin\delta'}\right].. \quad (3)$$

et qui se partage dans les trois équations suivantes :

$$\cos\gamma = \cos\beta\cos\delta - \sin\beta\sin\delta\cos\delta' \ldots \quad (4)$$
$$\sin\gamma\cos\gamma' = \sin\beta\cos\delta + \cos\beta\sin\delta\cos\delta' \ldots \quad (5)$$
$$\sin\gamma\sin\gamma' = \sin\delta\sin\delta' \ldots \quad (6)$$

Multipliant (4) par cos β, (5) par sin β, ajoutant et réduisant, il vient d'abord :

$$\cos\beta\cos\gamma = \cos^2\beta\cos\delta - \sin\beta\cos\beta\sin\delta\cos\delta'$$
$$\sin\beta\sin\gamma\cos\gamma' = \sin^2\beta\cos\delta + \sin\beta\cos\beta\sin\delta\cos\delta'$$

d'où, à cause de ..... $(\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1)$,

$$\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos\gamma' = \cos\delta \ldots \quad (7)$$

formule connue de la trigonométrie sphérique, qu'on aurait pu d'ailleurs écrire immédiatement, et qui donne γ'.

Il est à remarquer que cette équation ne varie pas si on change γ' en $(-\gamma')$. Ainsi un seul calcul suffira.

On peut donc désormais supposer connu l'angle γ' et poursuivre le calcul en développant l'équation (1).

Mais, pour simplifier la formule, on admettra qu'on ait d'abord calculé les éléments A′, M′, B′ du problème de la plus courte distance, de manière à écrire, en supprimant les accents :

$$A + M\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} + B\sqrt{-1}^{\beta} = A_1 + M_1\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}} + \beta_1\sqrt{-1}^{\beta} \ldots \quad (8)$$

On en déduit, après partage du développement :

$$A+B\cos\beta=A_1+M_1\cos\gamma+B_1\cos\beta\ldots \quad (9)$$
$$B\sin\beta=M_1\sin\gamma\cos\gamma'+B_1\sin\beta\ldots \quad (10)$$
$$M=M_1\sin\gamma\sin\gamma'\ldots \quad (11)$$

de (11), on conclut immédiatement : $M_1=\dfrac{M}{\sin\gamma\sin\gamma'}$

de (10) $(B-B_1)\sin\beta=M_1\sin\gamma\cos\gamma'=\dfrac{M\cos\gamma'}{\sin\gamma'}$

d'où $B-B_1=\dfrac{M\cos\gamma'}{\sin\beta\sin\gamma'}$

de (9) $(A-A_1)=-(B-B_1)\cos\beta+M_1\cos\gamma$

$$=-\frac{M\cos\gamma'\cos\beta}{\sin\beta\sin\gamma'}+\frac{M\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\gamma'}$$

d'où $\ldots A-A_1=M\left(\dfrac{\cos\gamma}{\sin\gamma\sin\gamma'}-\dfrac{\cos\beta\cos\gamma'}{\sin\beta\sin\gamma'}\right)$

La deuxième solution correspond à $(-\gamma')$, d'où résulte le changement de signe de $(\sin\gamma')$. — On aura donc évidemment :

$$M_2=-M_1$$
$(B-B_2)=-(B-B_1)$, d'où.... $B=\dfrac{B_1+B_2}{2}$
$(A-A_2)=-(A-A_1)$, d'où.... $A=\dfrac{A_1+A_2}{2}$

Ce qui justifie la symétrie des deux solutions par rapport à la plus courte distance, telle qu'on la remarque sur l'épure.

§ 3. — QUESTIONS SE RATTACHANT A LA THÉORIE

(*Voir le n° 44.*)

71. — Génération, Interprétation et réduction des complications diédrales, ou échelonnages d'exponentielles.

Nous avons dit (n° 24, chap III) comment il faudrait interpréter les échelonnages multiples de $\sqrt{-1}$, tels que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}}}$, en supposant que de tels symboles puissent se produire en algèbre.

Cependant, nous avons fait remarquer en même temps que ce ne sont que des cas particuliers de la forme générale $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\ldots}}}$, dans laquelle on aurait à la fois $\alpha=\alpha'=\alpha''=\alpha'''=\ldots=1$, et nous avons annoncé que nous reviendrons ici sur la génération, l'interprétation et la réduction de cette forme.

En premier lieu, nous avons établi (n^{os} 2 et 14) la signification de $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$ par rapport à α. Il doit être facile d'établir pareillement celle de $\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}$ par rapport à α', de $\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}$ par rapport à α''... etc...

En second lieu, nous avons vu (n° 1) que le symbole $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ suffit pour caractériser toutes les directions autour d'un point fixe. — Tout échelonnage multiple ou complication diédrale quelconque doit donc pouvoir se réduire à la forme la plus simple : c'est-à-dire que l'on doit toujours pouvoir résoudre l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}\ldots}}$$

ou, en d'autres termes, que le second membre de cette équivalence doit toujours être susceptible d'un développement de forme : $L+N\sqrt{-1}+P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, moyennant quoi on aura, comme on sait :

$$R^2=L^2+N^2+P^2,\quad \cos\rho=\frac{L}{R},\quad \operatorname{tg}\rho'=\frac{P}{N}.$$

Commençons par étudier la génération ou l'interprétation d'une complication diédrale.

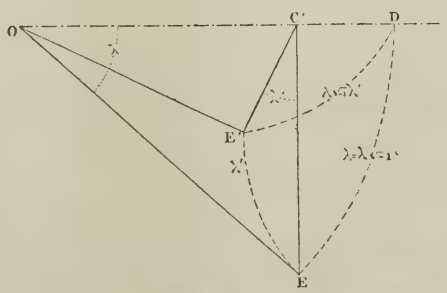


Fig. 59.

Rappelons que, comme on l'a vu (n^os 2 et 15), si (fig. 59) un arc ($DE=\lambda=\lambda\sqrt{-1}^{0}$), tournant autour de son rayon CD, se transporte en DE′, de telle sorte que l'angle dièdre E′C′E=λ′, son expression analytique deviendra $\left(\lambda\sqrt{-1}^{\lambda'}\right)$, l'angle λ′ ayant pour mesure l'arc EE′ dans la circonférence de rayon C′E=CD sin λ.

Cela posé, considérons la succession d'arcs représentés par la figure 60.

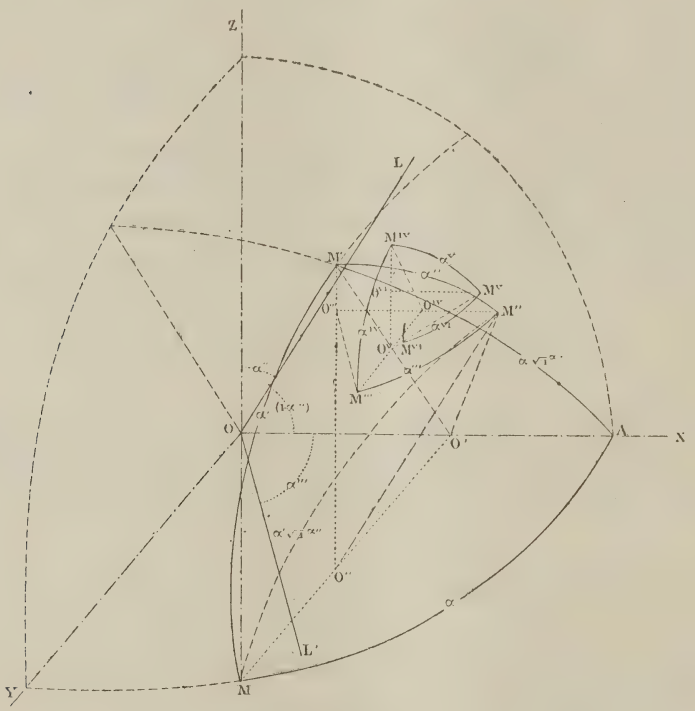


Fig. 60.

1°. α=AM, de centre O et de rayon OA=OM=r, situé dans le plan horizontal des xy, peut être considéré comme engendré par l'extrémité A de son rayon OA tournant autour de l'axe des z, perpendiculaire au plan de l'arc α.

2° α′=MM′, de centre O′ et de rayon O′M=r_1=r sin α′, situé dans un plan parallèle aux yz, peut être considéré comme engendré par

l'extrémité M de son rayon O'M, tournant autour de l'axe des x, perpendiculaire au plan de l'arc α.

L'arc AM' a pour expression analytique $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$, et le point M', comme le point M, est à la surface de la sphère de rayon $OA = r$ car MM' est un arc de petit cercle de cette sphère.

3°. $\alpha'' = M'M''$, de centre O'' et de rayon... $O''M' = r_2 = r_1 \sin \alpha' = = r \sin \alpha \sin \alpha'$, situé dans un plan parallèle aux xz, peut être considéré comme engendré par l'extrémité M' de son rayon O''M' tournant autour de $O'M = r_1$, parallèle à l'axe des y et perpendiculaire au plan de l'arc α''.

L'arc MM'' aura pour expression analytique $\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}$. — Mais le point M'' ne sera plus à la surface de la sphère de rayon r ; car l'axe de rotation MO' ne passant pas au centre O, l'arc MM'' n'appartient plus à un petit cercle de cette sphère, — mais à un grand cercle de la sphère de rayon r_1.

4°. $\alpha''' = M''M'''$, de centre O''' et de rayon... $O'''M''' = r_3 = r_2 \sin \alpha'' = r \sin \alpha \sin \alpha' \sin \alpha''$, situé dans un plan parallèle aux xy ou au plan horizontal, peut être considéré comme engendré par l'extrémité M'' de son rayon O'''M'' tournant autour de $O'''M' = r_2$, parallèle à l'axe des z et perpendiculaire au plan de l'arc α''.

L'arc M' M''' aura pour expression analytique $\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}$. Le point M''' ne sera plus sur la surface de la sphère de rayon r_1, l'arc M'M''' appartiendra à un grand cercle de la sphère de rayon r_2.

5°. Et ainsi de suite.... Il est facile de saisir la loi des complications diédrales successives, et d'en déduire les conséquences qu'elle comporte.

I. Les arcs d'indice $3n$, c'est-à-dire..... (α ou α_0, α''', α^{VI},...α^{3n}), sont parallèles au plan des xy.

Les arcs d'indice $(3n+1)$, c'est-à-dire.... (α', α^{IV}, α^{VII}, .. α^{3n+1}), sont parallèles au plan des yz.

Les arcs d'indice $(3n+2)$ ou $(3n-1)$, c'est-à-dire..... (α'', α^{V}, α^{VIII},....α^{3n+2}), sont parallèles au plan des xz.

II. Le rayon d'un arc d'indice m est le produit du rayon précédent par le sinus de l'arc précédent, ou le produit du rayon primitif par tous les sinus des arcs précédents.

$$r_m = r_{m-1} \sin \alpha_{m-1} = r \sin \alpha \sin \alpha' \sin \alpha'' \dots \sin \alpha_{m-1}.$$

Cette formule fournit le moyen d'établir le diagramme de tous les rayons successifs.

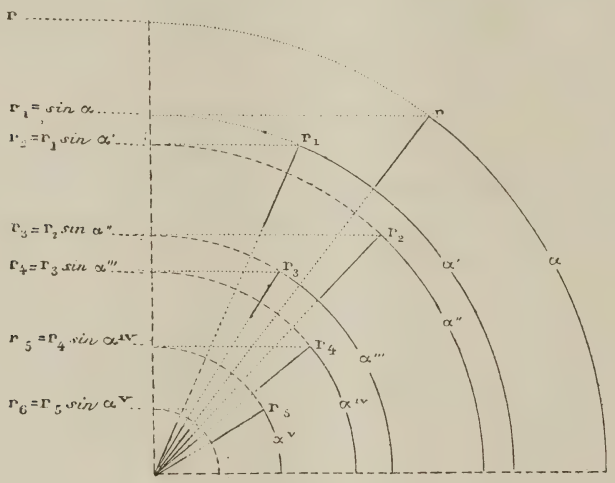


Fig. 61.

III. Les coordonnées des extrémités successives M, M′. M″... des arcs α, α', α''... sont faciles à calculer d'après la figure. Elles peuvent être exprimées sous deux formes différentes.

a. — En passant, suivant la marche naturelle, des coordonnées du point M′ à celles du [point M″, puis de M″ à M‴.., etc. on obtient d'abord le tableau (*a*) de la page 199, terminé par les formules générales d'où l'on peut déduire tous les cas particuliers.

Ce tableau confirme ce que montre d'ailleurs la figure, qu'un système quelconque de valeurs a toujours une coordonnée commune avec le système qui le précède immédiatement, savoir :

x pour $m=3n$ et $(3n+1)$, y pour $m=(3n+1)$ et $(3n+2)$, z pour $m=(3n-1)$ et $3n$.

TABLEAU *a*.

Arcs	Extrémités	x	y	z
α	M	$x = r\cos\alpha$	$y = r\sin\alpha = r_1$	$z = 0$
α'	M′	$x_1 = x$	$y_1 = r_1\cos\alpha'$	$z_1 = r_1\sin\alpha' = r_2$
α'	M″	$x_2 = x_1 + r_3$	$y_2 = y_1$	$z_2 = r_2\cos\alpha''$ .....
α'''	M‴	$x_3 = x_1 + r_3\cos\alpha'''$	$y_3 = y_2 + r_4$	$z_3 = z_2$ .....
α^{IV}	M^{IV}	$x_4 = x_3$	$y_4 = y_2 + r_4\cos\alpha^{IV}$	$z_4 = z_3 + r_5$
.....	.....	.....	.....	.....
α_{3n-1}	M_{3n-1}	$x_{3n-1} = x_{3n-2} + r_{3n}$	$y_{3n-1} = y_{3n-2}$	$z_{3n-1} = z_{3(n-1)} + r_{3n-1}\cos\alpha_{3n-1}$
α_{3n}	M_{3n}	$x_{3n} = x_{3n-2} + r_{3n}\cos\alpha_{3n}$	$y_{3n} = y_{3n-1} + r_{3n+1}$	$z_{3n} = z_{3n-1}$ .....
α_{3n+1}	M_{3n+1}	$x_{3n+1} = x_{3n}$	$y_{3n+1} = y_{3n-1} + r_{3n+1}\cos\alpha_{3n+1}$	$z_{3n+1} = z_{3n} + r_{3n+2}$
α_{3n+2}	M_{3n+2}	$x_{3n+2} = x_{3n+1} = r_{(3n+1)}$	$y_{3n+2} = y_{3n+1}$	$z_{3n+2} = z_{3n} + r_{3n+2}\cos\alpha_{3n+2}$

TABLEAU *b*.

Arcs	Extrémités	x	y	z
α	M	$x = r\cos\alpha$	$y = r\sin\alpha = r_1$	$z = 0$
α'	M′	$x_1 = x$	$y_1 = r_1\cos\alpha'$	$z_1 = r_1\sin\alpha' = r_2$
α''	M″	$x_2 = r\cos\alpha + r_3$	$y_2 = y_1$	$z_2 = r_2\cos\alpha''$ .....
α'''	M‴	$x_3 = r\cos\alpha + r_3\cos\alpha'''$	$y_3 = r_1\cos\alpha' + r_4$	$z_3 = z_2$ .....
α^{IV}	M^{IV}	$x_4 = x_3$	$y_4 = r_1\cos\alpha' + r_4\cos\alpha^{IV}$	$z_4 = r_2\cos\alpha'' + r_5$
.....	.....	.....	.....	.....
α_{3n-1}	M_{3n-1}	$x_{3n-1} = r\cos\alpha + r_3\cos\alpha''' + \ldots r_{3n-1}\cos\alpha_{3n-1} + r_{3n}$	$y_{3n+1} = r_1\cos\alpha' + r_4\cos\alpha^{IV} + \ldots r_{3n+2}\cos\alpha^{3n-2} = y_{3n-2}$	$z_{3n-1} = r_2\cos\alpha''' + r_3\cos\alpha^{V} + \ldots + r_{3n-1}\cos\alpha^{3n-1}$
α_{3n}	M_{3n}	$x_{3n} = r\cos\alpha + \ldots + \ldots + r_{3n}\cos\alpha_{3n}$	$y_{3n} = r_1\cos\alpha' + \ldots + r_{3n-2}\cos\alpha^{3n-2} + r_{3n+1}$	$z_{3n} = z_{3n-1}$ .....
α_{3n+1}	M_{3n+1}	$x_{3n+1} = x_{3n}$	$y_{3n+1} = r_1\cos\alpha' + \ldots + r_{3n+1}\cos\alpha^{3n+1}$	$z_{3n+1} = r_2\cos\alpha'' + \ldots + r_{3n-2}$
α_{3n+2}	M_{3n+2}	$x_{3n+2} = r\cos\alpha + \ldots + r_{3n}\cos\alpha^{3n} + r_{3(n+1)}$	$y_{3n+2} = y_{3n+1}$	$z_{3n+2} = r_2\cos\alpha'' + \ldots + r_{3n+2}\cos\alpha^{3n+2}$

b. — Mais on peut aussi exprimer chaque coordonnée uniquement en fonction des rayons des arcs et former ainsi le tableau *b*.

Indépendamment de la communauté d'une coordonnée entre deux systèmes successifs, ce tableau fait ressortir une autre conséquence.

Dans chaque système de valeurs, il y en a *deux* où il n'entre que des produits de rayons par des cosinus ; *une seule* où il entre en outre un rayon $r_m = r \sin\alpha \sin\alpha' \ldots \sin\alpha_{m-1}$ (II ci-dessus).

Si donc on suppose $\alpha = \alpha' = \alpha'' \ldots = \alpha_m = 1$, tous les termes affectés de cosinus s'évanouissent ; le terme en r_m subsiste seul, et on voit que ce sera x, y ou z suivant que m sera de forme $(3n-1)$, $3n$, ou $(3n+1)$.

Mais le nombre des coefficients $(\sqrt{-1})$ échelonnés est respectivement, dans chacun de ces cas, de $(m+1)$ ou de $3n$, $(3n+1)$,$(3n+2)$.

Donc, suivant que le reste de la division de $(m+1)$ par 3 sera 0, 1 ou 2, l'échelonnage de $\sqrt{-1}$ équivaudra, comme on l'a dit au n° 24, à 1, à $\sqrt{-1}$ ou à $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

IV. Quant au calcul des éléments de la direction représentée par OM_m, on n'aura, comme on l'a dit au début de ce numéro, qu'à poser l'équation :

$$\left(r\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''\sqrt{-1}\ldots}}} = R_m\sqrt{-1}^{\rho_m\sqrt{-1}^{\rho'_m}}\right) = x_m + y_m\sqrt{-1} + z_m\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}},$$

d'où l'on déduira. à la manière ordinaire, les valeurs de R_m, ρ_m et ρ'_m :

$$R^2_m = x^2_m + y^2_m + z^2_m \ , \quad \cos\rho_m = \frac{x_m}{R_m} \ , \quad \operatorname{tg}\rho'_m = \frac{z_m}{y_m} \ .$$

V. La question a été, jusqu'ici, traitée d'une façon purement géométrique. On va voir que les formules se vérifient par la seule considération des acceptions.

Partons de la formule acpuise :

$$r\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = r\left(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'\right) \ldots . (1)$$

et supposons que α' devienne $\left(\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}\right)$.

D'après la figure 60 où l'arc α' est représentée par MM' et l'arc $\left(\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}\right)$ par MM'', les deux arcs ont même cosinus représenté par O'O'', d'acception $\sqrt{-1}$.

Mais tandis que sin α' est représenté par O''M', d'acception $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, sin $\left(\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}\right)$ est représenté par O''M'' parallèle à OL, situé dans le plan des xz, et d'acception $\sqrt{-1}^{(1-\alpha'')\sqrt{-1}}$.

On devra donc, dans l'équation (1):

1° Maintenir cos α' sans changement.

2° Remplacer $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha'\right)$ par :

$$\left[\sqrt{-1}^{(1-\alpha'')\sqrt{-1}}\sin\alpha' = \sin\alpha'\left(\sin\alpha'' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos\alpha''\right)\right],$$

d'après la formule (f_2) du n° 11.

On aura donc, pour déterminer OM'' en grandeur et en direction, l'équation :

$$R_2\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}} = r\left[\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + \sin\alpha\sin\alpha'\left(\sin\alpha'' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos\alpha''\right)\right],$$

ou, en groupant les termes du second membre d'après les acceptions :

$$R_2\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho''_2}} = (r\cos\alpha + r\sin\alpha\sin\alpha'\sin\alpha'') + r\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha' + r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'\cos\alpha''$$

Mais cette équation devient, en y introduisant les rayons d'après leur expression générale (II, ci-dessus) :

$$R_2\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}} = (r\cos\alpha + r_3) + \sqrt{-1}\, r_1\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\, r_2\cos\alpha'' \ldots. \quad (2)$$

ou, en se reportant au tableau *b*:

$$R_2\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}} = x_2 + y_2\sqrt{-1} + z_2\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

La formule est donc vérifiée pour l'arc $\left(\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}\right)$.

Supposons que α'' devienne $\left(\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\right)$.

Partons de l'équation (2), mais en y écrivant $r_2 \sin\alpha''$ au lieu de r_3, pour laisser en évidence les termes qui contiennent l'arc α''.

Nous aurons, comme point de départ, l'équation :

$$R_2\sqrt{-1}^{\rho_2\sqrt{-1}^{\rho'_2}} = (r\cos\alpha + r_2\sin\alpha'') + \sqrt{-1}\, r_1\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\, r_2\cos\alpha'' \ldots \quad (2)^{bis}$$

dans laquelle α'' doit être remplacé par $\left(\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\right)$

D'après la figure 60 où l'arc α'' est représenté par M'M'' et l'arc $\left(\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\right)$ par M'M''', les deux arcs ont même cosinus représenté par O''O''' d'acception $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

Mais tandis que sin α'' est représenté par M''O''' d'acception **1**, sin $\left(\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\right)$ est représenté par M'''O''' parallèle à OL', situé dans le plan horizontal, et d'acception $\sqrt{-1}^{\alpha'''}$.

On devra donc, dans l'équation $(2)^{bis}$:

1° Maintenir cos α'' sans changement ;

2° Remplacer sin α'' par :

$$\left[\sqrt{-1}^{\alpha'''}\sin\alpha'' = \sin\alpha''(\cos\alpha''' + \sqrt{-1}\sin\alpha''')\right]$$

d'après la formule (f_1) du n° **11**.

On aura donc, pour déterminer OM''' en grandeur et en direction, l'équation :

$$R_3\sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3}} = r\cos\alpha + r_2\sin\alpha''(\cos\alpha''' + \sqrt{-1}\sin\alpha''') + \sqrt{-1}\, r_1\cos\alpha' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\, r_2\cos\alpha'',$$

ou, en groupant les termes par acception :

$$R_3\sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3}} = (r\cos\alpha + r_2\sin\alpha''\cos\alpha''') + (r_1\cos\alpha' + r_2\sin\alpha''\sin\alpha''')\sqrt{-1} + r_2\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos\alpha''$$

ou en écrivant les rayons d'après leur expresssion générale (II ci-dessus).

$$R_3\sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3}} = (r\cos\alpha + r_3\cos\alpha''') + (r_1\cos\alpha' + r_4)\sqrt{-1} + r_2\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\cos\alpha'' \ldots \quad (3),$$

ou, en se reportant au tableau *b* :

$$R_3\sqrt{-1}^{\rho_3\sqrt{-1}^{\rho'_3}} = x_3 + y_3\sqrt{-1} + z_3\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

La formule est donc vérifiée pour l'arc $\left(\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}\right)$.

Pour continuer, on partirait de l'équation (3) en y écrivant, dans le terme d'acception $\sqrt{-1}$, $r_3 \sin \alpha'''$ au lieu de r_4, et ainsi de suite.

72. — Interprétation de l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})}$. — Nous reprenons ici la question, dont l'examen a été ajourné (N° 10), de l'interprétation de l'expression $(x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})}$ quand x_1 et y_1 sont variables comme x et y.

Conservant les mêmes notations et désignant de plus, pour abréger, $(x+y\sqrt{-1})$ par F, et $(x_1+y_1\sqrt{-1})$ par f, nous poserons la même équation initiale qu'au n° 10.

$$F^f = \left(a\sqrt{-1}^{\alpha}\right)\left(a'\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$$

Elle se développe successivement comme il suit, eu égard aux indications du n° 29.

$$\begin{aligned} F^f &= a^{a'\sqrt{-1}^{\alpha'}} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \\ &= a^{a'(\cos\alpha'+\sqrt{-1}\sin\alpha')} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \\ &= a^{a'\cos\alpha'} \times a^{a'\sqrt{-1}\sin\alpha'} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} \\ &= a^{a'\cos\alpha'} \times e^{(a'la\sin\alpha')\sqrt{-1}} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} . \end{aligned}$$

Posant $a'la \sin\alpha' = \frac{\pi}{2}\alpha''$, d'où $\alpha'' = \frac{2a'la\sin\alpha'}{\pi}$, on aura :

$$F^f = a^{a'\cos\alpha'} \times \sqrt{-1}^{\alpha''} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} ,$$

et enfin :

$$F^f = \left(a^{a'\cos\alpha'} = R\right) \times \left(\sqrt{-1}^{\alpha''} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha''}} = \sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}\right),$$

ρ et ρ' étant à déterminer directement comme au n° 37, auquel il suffit de se reporter pour voir qu'on aura :

$$\cos\rho = \cos a'\alpha \cos\alpha' - \sin a'\alpha \sin\alpha'' \cos\alpha'$$

et :

$$\cot\rho' = \frac{\cot a'\alpha \sin\alpha'' - \cos\alpha'' \cos\alpha'}{\sin\alpha'}$$

formules connues de la trigonométrie sphérique.

Il est donc démontré que l'expression (F^f) est réductible à la forme $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$ dont le développement est lui-même de forme $(p + q\sqrt{-1} + r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}})$,—R, ρ et ρ' étant des variables aussi bien que p, q, r, qui ne peuvent devenir nulles que dans le cas d'hypothèses particulières sur les données.

I. — L'une de ces hypothèses sera précisément celle du n° 10, où $f = m + n\sqrt{-1}$, m et n étant des constantes : la formule générale doit naturellement contenir ce cas, et on le vérifie aisément ; car F^f peut s'écrire :

$$F^f = a^{a'\cos\alpha'} \times \left(\sqrt{-1}^{\frac{2a'la\sin\alpha'}{\pi}} \times \sqrt{-1}^{a'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$$

Il n'y a qu'à diminuer α et α' de α' pour effectuer la transformation de coordonnées indiquée au n° 10, et on obtient alors :

$$F^f = a^{a'\cos(\alpha'-\alpha')} \times \sqrt{-1}^{\frac{2a'la\sin(\alpha'-\alpha')}{\pi}} \times \sqrt{-1}^{a'(\alpha-\alpha')\sqrt{-1}^{(\alpha'-\alpha')}}$$

$$= a^{a'} \times (\sqrt{-1}^0 = 1) \times \sqrt{-1}^{a'(\alpha-\alpha')} = a^{a'}\sqrt{-1}^{a'(\alpha-\alpha')}$$

En introduisant d'ailleurs la même hypothèse dans la valeur de $\cos\rho$ et $\operatorname{tg}\rho'$, on trouve $\rho = a'(\alpha-\alpha')$, et $\rho' = o$, comme cela doit être aussi.

II. — Laissant de côté la supposition que x_1 et y_1 sont des constantes m et n, peut-on admettre que les fonctions F et f sont complètement indépendantes ?

Alors pour un système de valeurs de x_1 et y_1 correspondant par exemple, au point A_0 de la courbe f, on retomberait dans le cas

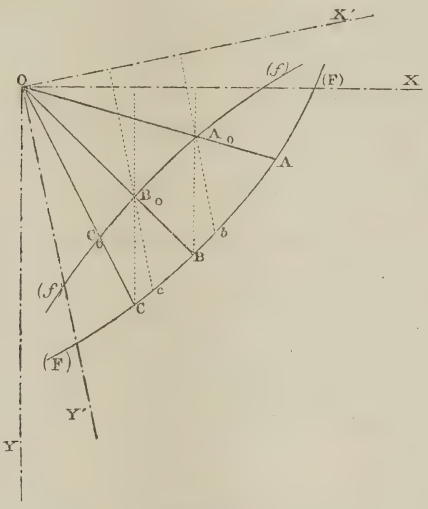


Fig. 62.

précédent. En combinant successivement OA_0 avec les rayons OA, OB, OC..... de F, on obtiendrait les éléments $(OA)^{OA_0}$, $(OB)^{OA_0}$, $(OC)^{OA_0}$...., à déterminer de grandeur et de direction comme on l'a fait au n° 10, — d'une courbe située dans le plan horizontal. Pour un autre système de valeurs de x_1 et y_1 correspondant au point B_0 de la courbe f, on obtiendrait une autre courbe, — c'est-à-dire qu'on en aurait une *infinité*.

Ce n'est évidemment pas ainsi qu'on peut envisager le but que l'on poursuit : il faut donc admettre une relation donnée entre les courbes f et F.

La première qui se présente à la pensée consiste à considérer simultanément, par exemple, les points de même abscisse, ce qui revient à supposer qu'on aurait toujours $x_1 = x$. Alors, les éléments de la résultante seront, par exemple : $(OB)^{OA_0}$, $(OC)^{OB_0}$,..... Mais il suffirait d'un changement dans la direction des axes pour avoir des éléments différents : $(Ob)^{OA_0}$, $(Oc)^{OB_0}$, etc.... Soit encore une infinité de solutions : ce ne seraient plus, à la vérité, des

courbes planes ; mais l'indétermination n'en subsisterait pas moins.

Elle disparaît au contraire complètement si on admet que la dépendance doive exister entre les rayons vecteurs correspondants de F et de f, c'est-à-dire que les éléments de détermination de la résultante soient $(OA)^{OA_0}$, $(OB)^{OB_0}$, $(OC)^{OC_0}$.... etc. Alors, en effet, les changements de coordonnées deviennent indifférents. Quant à la relation qui s'en suit entre les coordonnées des deux courbes, elle revient évidemment à écrire : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$, d'où $\alpha' = \alpha$.

Il n'en résulte aucun changement dans les formules, sauf la suppression de l'accent de α'.

Ce n'est pas qu'avec ce mode de dépendance des deux courbes, il ne puisse y avoir plusieurs solutions, si le rayon vecteur commun rencontre en plusieurs points l'une d'elles ou même toutes les deux : mais ces solutions seront toujours en nombre déterminé.

III. Nous donnerons comme exemple le plus simple celui de :

$$F^f = (x+y\sqrt{-1})^{(x_1+y_1\sqrt{-1})}$$

en supposant $(x^2+y^2=1)$, $(x_1^2+y_1^2=1)$, et toujours $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y}{x}$, ou $\alpha' = \alpha$. Il en résulte $a=1$, $a'=1$, $la=o$, et l'équation initiale se réduit à :

$$F^f = \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha}}$$

Elle contient évidemment la solution de la question qui serait posée en ces termes, puisqu'on peut prendre pour unité le rayon d'une sphère quelconque :

« *Déterminer, sur la surface de la sphère, le lieu de l'extremité* « *des rayons tels que l'angle de chacun d'eux avec l'axe des x soit* « *égal à l'inclinaison, sur le plan horizontal, du plan passant par* « *ce même rayon et par l'axe des x.* »

On posera :

$$x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} = \cos\alpha + \sqrt{-1}\,\sin\alpha\cos\alpha + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\,\sin^2\alpha$$

d'où :

$$x = \cos\alpha, \qquad y = \sin\alpha\cos\alpha, \qquad z = \sin^2\alpha$$

On aura :

Pour $\alpha = 0$:..... $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$
Pour $\alpha = 1$:..... $x = 0$, $y = 0$, $z = 1$.

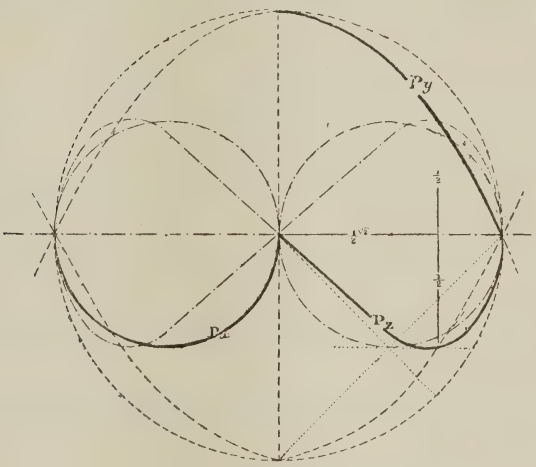


Fig. 63.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on a, d'après la figure, $(\sin\alpha = \cos\alpha)$; on a donc $2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha = 1$, d'où $\sin\alpha = \cos\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}$. On aura donc, pour $\alpha = \frac{1}{2}$:..... $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, $y = \frac{1}{2}$, $z = \frac{1}{2}$.

De plus, cette valeur de y est un *maximum,* puisqu'on aura en même temps $y^2 = \sin^2\alpha\cos^2\alpha$, avec $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. De là résulte que, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, les tangentes à la projection horizontale sont parallèles à l'axe des x et que les tangentes à la projection sur le plan des yz sont parallèles à l'axe des z.

Ces données suffisent pour tracer approximativement les trois projections du lieu, qui sont évidemment symétriques, et dont il est

d'ailleurs facile de déterminer les équations en éliminant l'angle α et successivement l'une des coordonnées z,y et x, entre les expressions de ces mêmes coordonnées.

1° Projection sur le plan horizontal des xy, ou projection par les z. On écrira :

$$x^2+y^2=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)\cos^2\alpha=2\cos^2\alpha-\cos^4\alpha=2x^2-x^4$$

d'où :

$$x^4-x^2+y^2=o\ldots\ldots\quad (P_z)$$

Vérification : — pour $y=o$, on a :

$$x^4-x^2=x^2(x^2-1)=o,\quad \text{d'où :}\ldots\ldots\ x=o\quad\text{et}\quad x=\pm 1$$

$$\text{pour } y=\frac{1}{2},\ \text{on a :}$$

$$x^4-x^2+\frac{1}{4}=o,\ \text{d'où } x^2=\frac{1}{2},\ \text{et } x=\pm\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

2° Projection sur le plan des xz, ou projection par les y. On écrira :

$$x^2+z^2=\cos^2\alpha+\sin^4\alpha=\cos^2\alpha+(1-\cos^2\alpha)^2=1-\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1-x^2+x^4$$

d'où :

$$x^4-2x^2-z^2+1=0\ldots\ldots\quad (P_y)$$

Mais à cause de $x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$, cette équation peut se mettre sous la forme :

$$(x^2-1+z)(x^2-1-z)=0,\ \text{ou :}\ (x^2-1\pm z)=0.$$

Elle représente deux paraboles passant par les extrémités des rayons dirigés suivant l'axe des x, et ayant pour sommets les extrémités des rayons dirigés suivant l'axe des z. La première correspond à la partie supérieure du plan ou aux valeurs positives de z, la seconde, à la partie inférieure du plan ou aux valeurs négatives de z.

Vérification : pour $z = 0$, on a : $x = \pm 1$

pour $(\pm z) = 1$, on a : $x = 0$

pour $(\pm z) = \frac{1}{2}$, on a : $x^2 = \frac{1}{2}$ d'où : $x = \pm \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

3° Projection sur le plan des yz, ou projection par les x.

On écrira :

$$y^2 + z^2 = \sin\alpha^2\cos^2\alpha + \sin^4\alpha = \sin^2\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1) = \sin^2\alpha = z,$$

d'où, en mettant en évidence les deux cas de z positif et z négatif :

$$y^2 + z^2 - (\pm z) = o \ldots\ldots \quad (P_x)$$

Cette équation représente deux circonférences de cercle passant à l'origine et ayant pour diamètre vertical les rayons dirigés suivant les parties supérieure et inférieure de l'axe des z.

Vérification :

pour $y = o$, on a : $z^2 - (\pm z) = z[z - (\pm 1)] = 0$, d'où $z = o$, et $z = (\pm 1)$

pour $y = \frac{1}{2}$, on a : $z^2 - (\pm z) + \frac{1}{4} = o$, d'où $(\pm z) = \pm \frac{1}{2}$

73 — Réduction et interprétation de l'expression :

$$F^f = \left(x + y\sqrt{-1} + z\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\left(x_1 + y_1\sqrt{-1} + z_1\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)}$$

Remplaçons d'abord chaque trinôme par son expression analytique, dont on sait déterminer les éléments. On aura :

$$F^f = \left(R\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}\right)^{\left(R_1\sqrt{-1}^{\rho_1}\sqrt{-1}^{\rho_1'}\right)}$$

Mais, par les mêmes motifs que tout à l'heure (n° 72-II) on doit, pour que la question soit déterminée, admettre entre les fonctions F et f une dépendance consistant à considérer simultanément les rayons vecteurs de même direction, ce qui revient à supposer $\rho_1 = \rho$ et $\rho_1' = \rho'$.

On aura donc à traiter l'équation :

$$F^f = \left({}_R\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}\right)\left({}_{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}\right)$$

$$= R^{{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}} \times \sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'\,{}_{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}}$$

$$= R^{{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}} \times \sqrt{-1}^{{}_{R_1}\rho\sqrt{-1}^{\rho'}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}} \quad \ldots \quad (1)$$

Examinons successivement chacun des facteurs du second membre :

Premier facteur. — $\left({}_R{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}\right)$. Suivant la marche indiquée au n° 29, on écrira :

$${}_R{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = \left({}_R{}^{R_1}\right)\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = \left({}_R{}^{R_1}\right)^{(\cos\rho+\sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho')}$$

$$= R^{{}^{R_1}\cos\rho} \times R^{{}^{R_1}\sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho'} \times R^{{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho'}$$

$$= R^{{}^{R_1}\cos\rho} \times e^{{}^{R_1}l R\sqrt{-1}\sin\rho\sin\rho'} \times e^{{}^{R_1}l R\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho'}$$

Posant $\left({}_{R_1}l R\sin\rho\cos\rho'\right) = \frac{\pi}{2}\alpha$, et $\left({}_{R_1}l R\sin\rho\sin\rho'\right) = \frac{\pi}{2}\alpha'$, on aura :

$${}_R{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = R^{{}^{R_1}\cos\rho} \times \sqrt{-1}^{\alpha} \times \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)^{\alpha'}$$

ou en posant $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}}\right) = \sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$, et en déterminant β et β' par les formules du n° 37 :

$${}_R{}^{R_1}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'} = R^{{}^{R_1}\cos\rho}\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$$

Le premier facteur est donc une quantité de module $R^{{}^{R_1}\cos\rho}$, et d'aception réflexe $\sqrt{-1}^{\beta}\sqrt{-1}^{\beta'}$

Deuxième facteur. — $\left(\sqrt{-1}^{{}_{R_1}\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}\right)$. — Posant $\left(\sqrt{-1}^{\rho'}\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}\right) = \sqrt{-1}^{\gamma}\sqrt{-1}^{\gamma'}$, et déterminant γ et γ' par les formules du n° 37, on aura :

$$\sqrt{-1}^{R_1\rho\sqrt{-1}^{\rho'}\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}} = \sqrt{-1}^{R_1\rho\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}}$$

Le second membre est de la forme $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}}}$ étudiée au n° 71, et on a vu qu'il est réductible à la forme $r\sqrt{-1}^{\delta\sqrt{-1}^{\delta'}}$.

Remplaçant dans l'équation (1) chaque facteur par l'expression dernière à laquelle on est parvenu, il vient :

$$F^f = \left(R^{R_1\cos\rho} \times \sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}\right) \times r\sqrt{-1}^{\delta\sqrt{-1}^{\delta'}}$$
$$= rR^{R_1\cos\rho} \times \left(\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} \times \sqrt{-1}^{\delta\sqrt{-1}^{\delta'}}\right)$$

Posant $\left(\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}} \times \sqrt{-1}^{\delta\sqrt{-1}^{\delta'}}\right) = \sqrt{-1}^{\varphi\sqrt{-1}^{\varphi'}}$, et déterminant φ et φ' par le procédé du n° 37, on aura finalement :

$$F^f = rR^{R_1\cos\rho} \times \sqrt{-1}^{\varphi\sqrt{-1}^{\varphi'}}$$

c'est-à-dire une quantité de module $rR^{R_1\cos\rho}$, et d'acception réflexe $\sqrt{-1}^{\varphi\sqrt{-1}^{\varphi'}}$: quantité variable, bien entendu, avec les éléments également variables des fonctions F et f, qui entrent dans son expression ; de sorte que F et f représentant en général des surfaces, F^f, qu'on pourra désigner par Φ, représentera également une surface.

74 — Réduction et interprétation de l'expression de forme :

$$F_m^{F_{m-1}^{F_{m-2}\ldots F_3^{F_2^{F_1}}}}$$

On commencera, en procédant comme au n° 73, par F^{2F_1}.

Il est presque superflu de faire remarquer qu'on ne saurait commencer par $F_m^{F_{m-1}}$, ce qui donnerait un résultat tout autre, et reviendrait, en fait, à la résolution de $F_m^{F_{m-1}\times F_{m-2}\times\ldots F_2\times F_1}$ — C'est ainsi que quand on écrit (5^{3^2}), par exemple, il faut entendre qu'il s'agit de : $(5^{(3^2=3\times3=9)}=5^9)$, et non de : $((5^3)^2=5^{3\times2}=5^6)$.

On commencera donc par $F_2^{F_1}$, et on aura successivement :

$$F_2^{F_1} = \Phi_1$$
$$F_3^{\Phi_1} = \Phi_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$F_{m-1}^{\Phi_{m-3}} = \Phi_{m-2}$$

et enfin. . . . . $F_m^{\Phi_{m-2}} = \Phi_{m-1}$

On voit comment la théorie des acceptions se prête à la réduction des fonctions les plus compliquées de $\sqrt{-1}$ à la forme trinôme $\left(p+q\sqrt{-1}+r\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ ou à l'expression analytique équivalente $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$, et nous croyons pouvoir considérer comme suffisamment complète la vérification sous réserve de laquelle a été formulée, au n° 3, la proposition qui résume la thèse de l'abbé George:

« *Il n'y a pas de quantités imaginaires* »

CHAPITRE VIII.

Travaux de feu l'abbé George.

---

75. — Origine des recherches de l'abbé George.
76. — Conception de l'acception *simple*. — Son expression analytique. — Composition des droites dans le plan.
77. — Origine de la Règle du n° 23.
78. — Conception de l'acception *réflexe*. — Son expression analytique.
79. — Développements trinôme et trigonométrique de l'acceptation *réflexe*.
80. — Angles trièdres et polyèdres. — Produits des acceptions *réflexes*.
81. — Composition des droites dans l'espace.
82. — Expression analytique des plans.
83. — Procédé général d'application de la méthode des acceptions aux questions de géométrie.
84. — Devanciers de l'abbé George : il n'a connu leurs travaux qu'après avoir été plus loin qu'eux.
85. — Deux conceptions différentes du traité « *de l'Acception* » :
    1° Avant 1869 : comme ouvrage unique, ébauché seulement.
    2° Vers 1880 : comme faisant suite à une thèse en forme contre la *négation de la réalité* de $\sqrt{-1}$ et de ses fonctions.
86. — La thèse préalable est superflue.
87. — Dernière rédaction du Traité « *de l'Acception* » compliquée d'une modification de l'Algorithme. — Cette modification est écartée dans le « *Mémoire* ».
88. — Importance *secondaire* de la *Méthode* des acceptions au point de vue *pratique*.
89. — Importance *capitale* de la *Théorie* des acceptions.

75. — Origine des recherches de l'abbé George.

L'abbé George n'a pas cessé de s'occuper de la question des imaginaires pendant la majeure partie, — plus des *deux tiers*, — de sa longue existence (1796-1887).

Il a expliqué comment il y avait été conduit, et comment il est successivement parvenu à l'élaboration de la nouvelle doctrine qu'il propose. Dans un *Avant-propos* préparé pour une publication

qu'il avait en vue sous ce titre : « *De l'acception des quantités dans l'analyse mathématique* », M. George s'exprime en ces termes :

« Les préoccupations de ma vocation au sacerdoce ne m'appe-
« laient pas à l'étude des mathématiques ; je n'y suis donc arrivé
« qu'assez tard, et alors seulement que l'enseignement de la phi-
« losophie, dont je me trouvais chargé, » (*sans pouvoir dire exactement à quelle époque, on est du moins certain que c'était avant* 1830), « me faisait comme un devoir de prendre au moins quelque
« connaissance d'une de ses parties si importante. C'était, on le
« voit, beaucoup plus le rapport tout *métaphysique* de la déduction
« des idées, que la science elle-même, que je recherchais ; et il n'est
« pas étonnant que je me sois, presque au début, violemment heurté
« à un détail sur lequel passent tous les jours, sans sourciller, une
« foule de bons esprits, très supérieurs au mien sans doute, mais
« placés dans des conditions différentes : je veux parler des quan-
« tités de coefficient $\sqrt{-1}$, que l'on qualifie d'*imaginaires*, parce
« qu'elles ne sont ni *positives* ni *négatives*.

« Quand je me fus assuré qu'il ne s'agissait pas ici d'une simple
« dénomination, plus ou moins recevable, mais d'une véritable dé-
« négation de la réalité, je me sentis tout *révolté*, je n'exagère pas,
« que l'on traitât ainsi une simple modification du coefficient (—1)
« qui, de l'aveu de tous, s'appliquant à des modules, constitue des
« quantités très réelles.

« La raison alléguée qu'aucune quantité ni positive ni négative ne
« pouvait donner un carré négatif, ne me semblait qu'une pétition
« de principe, supposant ce qui était en question, à savoir : qu'il ne
« pouvait y avoir de *réelles* que des quantités *positives* ou *négati-*
« *ves*. Les exemples produits en preuve, que, dans la résolution
« des questions, les résultats de forme : $x = A\sqrt{-1}$, ou $A \pm B\sqrt{-1}$,
« étaient de purs indices d'impossibilité, m'étaient suspects comme
« fabriqués pour les besoins de la cause et, après tout, il me sem-
« blait qu'en généralisant davantage la signification de certaines
« expressions, le résultat n'était pas si inadmissible qu'il le parais-
« sait d'abord.

« Un peu plus loin, je pus m'assurer, non seulement que l'on te-

« nait un compte très sérieux de ces sortes de quantités dans l'ap-
« préciation de la valeur des radicaux et des racines d'équations
« des degrés supérieurs, ce qui me paraissait déjà une étrange in-
« conséquence ; mais qu'on les employait à la recherche et à la for-
« mation des quantités même avouées pour réelles. — Comme si
« des quantités pouvaient mathématiquement se déduire d'autres
« sans qu'elles n'aient avec elles des relations qui constituent
« celles-ci très réelles dans le sens le plus rigoureux du mot. Par
« exemple, comme si (—1), tenu pour *réel*, pouvait se déduire de
« $(\sqrt{-1})$, en écrivant $(\sqrt{-1}^2 = -1)$, sans que $(\sqrt{-1})$ soit *réel* au
« même titre que (—1).

« On pense bien que l'occasion ne me manqua pas, et que je
« n'eus garde de la manquer, de proposer mes doutes à des juges
« compétents. Il me fût répondu que *ces quantités n'étaient in-*
« *troduites que comme de simples relations ; qu'entre une relation*
« *simple et une quantité véritable, il y avait pour distance l'infini.*

« J'avoue, en toute humilité, qu'aujourd'hui encore, je ne saisis
« pas ce que peut avoir de fondé une distinction aussi subtile. —
« Pour moi, toute relation exprimée sous la forme d'une quantité
« est une quantité, et toute quantité qui a des relations incontesta-
« bles avec des quantités *réelles*, est-elle même incontestablement
« *réelle*. La détermination de sa nature propre peut présenter plus
« ou moins de difficulté ; mais une étude opiniâtre doit toujours
« finir par l'assigner.

76. — Conception de l'acception simple. — Son expression analytique. — Composition des droites dans le plan.

« Amené par ces considérations générales à la ferme conviction
« qu'il n'y avait d'*imaginaire*, dans ces quantités $A\sqrt{-1}$, $A \pm B\sqrt{-1}$,
« que la qualification qu'on leur donnait, j'avais à cœur d'arriver
« pour elles à une appréciation certaine. Le rapport de $(\sqrt{-1})$ à (± 1)
« m'était imposé pour point de départ, et pour plus de sûreté dans
» mon raisonnement, je choisis comme application les *directions*
« *rectilignes*.

« Puisque, me disais-je, quand on chemine en ligne droite dans

« un plan, le coefficient (—1) doit indiquer que l'on va dans le « sens opposé à celui qu'on suivrait pour le coefficient (+ 1) ; « puisque le coefficient ($\sqrt{-1}$) est une *moyenne proportionnelle* en- « tre (+1) et (—1), car $\sqrt{-1} = \sqrt{(+1)\times(-1)}$, il faut que le coeffi- « cient ($\sqrt{-1}$) indique une *marche moyenne intermédiaire* entre les « deux premières, c'est-à-dire perpendiculaire à leurs deux direc- « tions.

« Si mon raisonnement ne me trompait pas, l'imposition du « coefficient ($\sqrt{-1}$), donnée à une direction quelconque, devait l'é- « tablir perpendiculairement à sa première position, et c'est ce qui « se trouva pleinement confirmé par :

« $+1.\sqrt{-1}=\sqrt{-1};\sqrt{-1}^2=-1;-1\times\sqrt{-1}=-\sqrt{-1};-\sqrt{-1}\sqrt{-1}=-\sqrt{-1}^2=+1.$

« Dès ce moment, je me trouvais irrévocablement fixé.

« Il est d'ailleurs évident que ce raisonnement ne se borne pas « aux directions proprement dites, mais qu'il s'étend à toute quan- « tité susceptible d'acception moyenne entre celles que désignent « pour elle les coefficients (+1) et (—1), *quantité à laquelle on « peut toujours attribuer une représentation linéaire.*

« Ainsi, je n'avais plus à considérer l'expression $A \pm B\sqrt{-1}$ que « comme celle d'une longueur B, aboutée perpendiculairement à « A, sur son extrémité, en l'une ou l'autre des régions du plan « qu'auraient déterminée des conventions préalables. Et les so- « lutions $x = A \pm B\sqrt{-1}$ ne devenaient généralement plus, quand « la question n'était pas absurde, que des solutions indirectes, ana- « logues à celles qui amènent des quantités négatives, fractionnai- « res, irrationnelles, infinies, etc. au lieu des quantités positives, « entières, rationnelles, finies, etc., qu'on semblait en attendre. « Loin donc de pouvoir être rejetées, elles devront être admises au « même titre que leurs devancières, et elles apporteront le dernier « degré de perfectionnement à la généralisation du raisonnement « mathématique.

« La possibilité de déduire toutes les directions formant angle « droit entre elles, à partir de (+ 1), de l'expression ($\sqrt{-1}^{\alpha}$) où α « serait exprimé en nombres entiers et représenterait un nombre

« quelconque d'angles droits ou de quarts de circonférence de « rayon 1, m'a porté à conclure qu'en continuant à évaluer α rela- « tivement à cette unité, $(\sqrt{-1}^{\alpha})$ représenterait toujours la direction, « sous l'angle α fait avec $(+1)$ pris pour $(\sqrt{-1}^{0})$, quelle que soit la valeur entière ou fractionnaire, rationnelle ou irrationnelle de α.

« Pa suite de cette observation, $A\sqrt{-1}^{\alpha}+B\sqrt{-1}^{\beta}+C\sqrt{-1}^{\gamma}+$ etc. « devenait l'expression d'un contour rectiligne plan, aux côtés suc- « cessifs A,B,C, etc..., faisant respectivement avec $(+1)$ les angles « α,β,γ, etc..., et entre eux, de proche en proche, à l'extérieur, les « angles $(\beta-\alpha),(\gamma-\beta)$, etc... »

Suit le développement des premières déductions résultant des notions qui précèdent en géométrie et en algèbre ; puis, l'auteur poursuit ainsi :

77. — Origine de la règle du N° 23.

« Cependant, je fus longtemps troublé et retardé par la persistance « d'une difficulté qui ne méritait pas d'arrêter un instant le plus « mince écolier, et qui semblait se jouer de tous mes efforts. Pour « plus de simplicité, je l'expose sous la forme d'un problème :

« Soit à construire par des droites l'expression $x+y\sqrt{-1}$, x étant « arbitraire, et y étant une certaine fonction de x : comment cons- « truire quand $y=\varphi(x)$ est de forme $(A\sqrt{-1})$, de sorte que la subs- « titution donne $x+(A\sqrt{-1})\sqrt{-1}$, ou, d'après la règle algébrique de « la multiplication, $x+A(\sqrt{-1}\times\sqrt{-1})=(x-A)$?

« Je ne pouvais admettre un tel résultat, d'après lequel y serait, « comme x, mesuré suivant l'axe des x, tandis que sa représenta- « tion linéaire devait, *en tous cas,* demeurer perpendiculaire à celle « de x, d'après la condition nénérale que lui imposait sa première « forme $(y\sqrt{-1})$.

« Il m'a fallu je ne sais combien de temps et quelle heureuse « illumination pour me faire remarquer que y devenant $(A\sqrt{-1})$ de- « vait, *sans cesser* d'être *perpendiculaire* à x, *devenir également per-* « *pendiculaire* à la *représentation première* de y tracée *perpendi-*

« *culairement* à x dans le *plan horizontal*, c'est-à-dire que A de-
« vait, en définitive, être *perpendiculaire* au *plan des xy*, ou *paral-*
« *lèle* à l'*axe* des z ».

(Ce passage si important de l' « *Avant-propos* » a déjà été cité au début du n° 23 du Mémoire).

78.— Conception de l'acception réflexe. Son expression analytique.

— « Mais l'apparition des directions sises hors du plan de construc-
« tion implique la nécessité d'une notation dérivée des précédentes,
« capable d'enchaîner entre elles toutes les quantités sises d'une
« manière quelconque dans l'esqace, et d'étendre à toutes, indis-
« tinctement, des règles générales d'analyse et de construction.

« Ici, l'algèbre actuelle me faisait complètement défaut ; et
« comme cependant il importait que les nouvelles notations aient
« un rapport algébrique certain avec les premières afin que l'on
« puisse passer algébriquement des unes aux autres, j'ai dû reve-
« nir sur $\sqrt{-1}^{\alpha}$ et voir quelle modification il fallait lui imposer pour
« le rendre propre aux nouveaux usages.

« Si, dans $\sqrt{-1}^{\alpha}$, au lieu de supposer α simplement de coefficient
« (± 1), on le suppose plus généralement de coefficient $\sqrt{-1}^{\alpha'}$, on
« aura $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ pour expression d'une nouvelle direction dont il
« s'agit d'assigner la valeur.

« L'angle α de la première direction, fait donc lui-même, d'après
« le coefficient $\sqrt{-1}^{\alpha'}$ qu'il prend, un angle α', lequel ne peut en rien
« le modifier, pas plus que dans $A\sqrt{-1}^{\alpha}$, α ne modifie A ; α modi-
« fié, d'ailleurs, ne serait plus simplement α ; α' ne peut donc s'en-
« tendre que du *dièdre* que le plan de α ferait avec le plan de cons-
« truction, le premier côté de α servant d'arête au dièdre, et son
« second côté représentant spécialement la direction $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$.

« $A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ en devient généralement l'expression d'une quan-
« tité A prise d'acception α réflexe de α'.

« α', aussi bien que α, devra s'évaluer en angles droits ou quarts « de circonférence ; de sorte que la direction également perpendi- « culaire à (± 1) et $(\pm\sqrt{-1})$, pour laquelle on a $\alpha = \alpha' = 1$, sera « $\pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$.

« $(\sqrt{-1})$ s'énoncera *perpendiculaire*, et $\left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\right)$ *double perpen-* « *diculaire*. »

79. — Développements trinôme et trigonométrique de l'acception réflexe.

« Etant ainsi reconnues trois sortes de directions perpendicu- « laires l'une à l'autre, caractérisées par les *coefficients* ou ac- « ceptions ± 1, $\pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, si l'on suppose que trois modu- « les rectilignes de grandeurs L,N,P et respectivement distingués « par ces acceptions, soient aboutés l'un à l'aetre, et que l'on « joigne par une droite l'origine et l'extrémité de cet aboutement,

« il en résultera une quantité de forme $R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$, et l'on pour- « ra écrire l'équation :

$$R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = L + N\sqrt{-1} + P\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}.$$

« puisque les deux membres ne sont que deux manières différentes « d'exprimer une seule et même quantité, à savoir la distance des « deux extrémités de l'aboutement.

« R, ρ et ρ' se déterminent en fonction de L,N,P au moyen de « la décomposition orthonogale de $\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$:

$$\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}} = \cos\rho + \sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho' + \sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho'.$$

« On conçoit que pour une quantité quelconque, une quatrième « composante orthogonale serait essentiellement impossible ; car « toute perpendiculaire, ou son équivalent, à N et à P, ne peut être

« que L, déjà indiquée comme telle ; la quatrième composante re-
« tomberait donc nécessairement dans la première, et ainsi de suite.

» De sorte que $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''}}}$ est essentiellement réductible à la

« forme $\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$, ρ et ρ' à exprimer en fonction de α, α' et α''.

« A plus forte raison en serait-il de même de $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'\sqrt{-1}^{\alpha''\sqrt{-1}^{\alpha'''}}}}$...
« et autres complications ultérieures de cette nature. »

80. — Angles trièdres et polyèdres. Produits des acceptions réflexes.

« Si l'indice $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$, que nous appelons *réflexe*, était polygonal,
« ou de forme :

$$\alpha\sqrt{-1}^{\alpha}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\text{etc...}$$

« il se traduirait géométriquement par le contour d'un angle po-
« lyèdre aux faces successives α, β, γ, etc. faisant respectivement
« avec un même plan les dièdres α', β', γ', etc. Appelant $\rho\sqrt{-1}^{\rho'}$ la
« dernière face de cet angle, c'est-à-dire celle qui joint les extré-
« mités du contour précédent, on pourra écrire encore :

$$\rho\sqrt{-1}^{\rho'}=\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}+\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}+\text{etc...}$$

« ρ et ρ' devant s'exprimer en fonction de $\alpha\,\alpha'$, $\beta\,\beta'$, $\gamma\,\gamma'$, etc. ; mais
« par des *moyens différents* de *ceux* que l'on *emploie* quand les *mo-*
« *dules sont des droites*, parce que le mode d'assemblage géomé-
« trique n'est plus le même.

« Le moyen le plus général d'obtenir cette résultante est de po-
« ser, pour deux termes par exemple :

$$\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}+\beta\sqrt{-1}^{\beta'}=\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\times\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}=\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$$

« d'où passant aur composantes orthogonales :

$$\cos\rho+\sqrt{-1}\sin\rho\cos\rho'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\rho\sin\rho'=$$
$$=\left(\cos\alpha+\sqrt{-1}\sin\alpha\cos\alpha'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\alpha\sin\alpha'\right)\left(\cos\beta+\sqrt{-1}\sin\beta\cos\beta'+\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}\sin\beta\sin\beta'\right)$$

« Il n'y a plus ensuite qu'à effectuer la multiplication et à égaler « les modules de même acception dans chaque membre.

« S'il y avait plus de deux termes au polynôme, on pourrait pour- « suivre cette marche ; mais elle deviendrait très laborieuse. — « Nous enseignons le moyen de toujours réduire le nombre des « termes à deux, comme aussi de résoudre quelques difficultés « que présente la multiplication elle-même.

« De là la solution, par de simples multiplications, de toutes les « questions qui peuvent concerner l'angle polyèdre.

81. — Composition des droites dans l'espace.

« Si les quantités d'acception réflexe étaient réunies en un poly- « nome tel que :

$$A\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}+B\sqrt{-1}^{\beta\sqrt{-1}^{\beta'}}+C\sqrt{-1}^{\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}}+\text{etc...}$$

« la traduction géométrique sera un contour polygonal, aux côtés « successifs A,B,C, etc... faisant respectivement chacun les angles $\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}$, $\beta\sqrt{-1}^{\beta'}$, $\gamma\sqrt{-1}^{\gamma'}$, etc... avec une même droite et un même « plan ou leurs parallèles : d'où résultera généralement que ces « côtés pris consécutivement trois à trois, ne seront pas dans un « même plan. Ce qui fera donner à ce contour le surnom de *gauche*.

« La résultante de ce contour s'obtient à la manière de celle des « contours plans, parce que le mode d'assemblage géométrique est « le même.

82. — Expression analytique des plans.

De ces expressions des directions sises dans l'espace résultent « nécessairement celles des plans qui les contiennent.

« De $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \left(\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)^{\alpha}$, par exemple, on conclut, en faisant varier α tandis que α' demeure constant, que cette expression représente le *lieu* de toutes les directions comprises dans le plan d'inclinaison α', c'est-à-dire *ce plan lui-même,* et que $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est sa ligne de *plus grande pente.*

« Dans le cas plus général : $\left(\sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = \sqrt{-1}^{a} \times \sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}\right)$, $\left(\sqrt{-1}^{a}\right)$ est la *trace* du plan, c'est-à-dire la direction suivant laquelle il coupe le plan horizontal. $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est sa ligne de plus grande pente, et $\sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ est sa génératrice.

« $M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}} + A\sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = R\sqrt{-1}^{\rho\sqrt{-1}^{\rho'}}$ sera l'équation du plan passant par l'extrémité de la droite $M\sqrt{-1}^{\mu\sqrt{-1}^{\mu'}}$, de trace $\sqrt{-1}^{a}$ et de pente $\sqrt{-1}^{a+\sqrt{-1}^{\alpha'}}$.

« $L\sqrt{-1}^{\lambda\sqrt{-1}^{\lambda'}} + A\sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}} = R_1\sqrt{-1}^{\rho_1\sqrt{-1}^{\rho'_1}}$ sera l'équation d'un plan parallèle au précédent, passant par l'extrémité de la droite $L\sqrt{-1}^{\lambda\sqrt{-1}^{\lambda'}}$.

« $\sqrt{-1}^{a+\alpha\sqrt{-1}^{(1+\alpha')}}$ caractérisera un plan de même trace $\sqrt{-1}^{a}$, et perpendiculaire au premier.

83. — Procédé général d'application de la Méthode des acceptions aux questions de géométrie.

« Généralement, l'expression d'une direction étant donnée, il est toujours facile d'en tirer celle d'un plan qui a tel rapport de position que l'on voudra avec le sien. Il ne le sera pas moins d'en tirer celle d'une droite sise comme l'on voudra dans l'un de ces nouveaux plans qui aura avec elle un rapport de position quelconque ; et ainsi *toute question de géométrie dans l'espace se réduira*

« *à former*, d'après les conditions nécessaires, l'équation d'un *angle*
« *polyèdre* ou d'un *polygone gauche*, et à en extraire les inconnues
« de la manière indiquée.

84. — Devanciers de l'abbé George ; il n'a connu leurs travaux qu'après avoir été plus loin qu'eux.

« Tel est, dans son ensemble, l'ordre de considérations que je
« propose aujourd'hui.

« J'ai hâte de reconnaître en même temps que quelques-unes de
« ces idées sont loin d'apparaître pour la première fois ».

Suit un abrégé très succinct de l'historique de la question, où sont mentionnés les principaux auteurs qui s'en sont occupés : l'abbé Bué, (1801) ; Argand (1806) ; Mourey (1828), etc.

« Depuis, » poursuit M. George, « la question a encore été re-
« prise à divers temps par divers auteurs, présentée à plusieurs
« sociétés savantes et à l'Institut, abordée même par l'illustre Cau-
« chy, toujours avec aussi peu de succès. Serait-ce que ces travaux
« n'étaient pas assez complets ? qu'on aura jugé qu'ils laissaient à
« résoudre encore trop de difficultés pour qu'on puisse leur accor-
« der droit de cité ? J'aime à le croire ; et c'est ce qui me donne quel-
« que confiance de paraître à mon tour.

« A si longue distance, des premières publications surtout, je
« ne suis plus recevable à revendiquer des titres de priorité. —
« Tout en le reconnaissant, je dois à la vérité d'affirmer que je n'ai
« eu aucune connaissance d'idées déjà émises sur ce sujet que bien
« longtemps après avoir été moi-même beaucoup plus loin que mes
« devanciers. La première notion ne m'en vint que par les leçons
« d'algèbre de M. Lefébure de Fourcy (4e édition, 1841), et depuis,
« par l'ouvrage si original de Mourey, ainsi que par les articles des
« Annales de Mathématiques de Gergonne (T. IV et V, 1813-1815).
« Dès 1845 d'ailleurs, M. Terquem, éditeur avec M. Gérono des
« Nouvelles Annales, me désignait (T. IV, p. 616) comme m'occu-
« pant depuis longtemps du même sujet, — et annonçait pour le n°
« suivant une lettre de moi, qui n'a pu être insérée par des rai-
« sons étrangères à la science.

« Il sera du reste facile, par la comparaison, de faire la part propre à mon ouvrage, rapproché des publications antérieures ».

85. — Deux conceptions différentes du traité « *De l'acception* ».

1° *Avant 1869 : comme ouvrage unique, ébauché seulement.*

L'ouvrage intitulé : « *De l'acception des quantités dans l'analyse mathématique* » n'a jamais reçu complètement sa forme définitive. Il en existe, en premier lieu, plusieurs ébauches auxquelles on ne peut assigner un ordre certain de priorité, mais qui, d'après quelques indications, remontent au moins à 1869, et pour lesquelles avait évidemment été préparé l' « *Avant-propos* ».

2° *Vers 1880 : comme faisant suite à une thèse en forme contre la négation de la réalité de* $\sqrt{-1}$ *et de ses fonctions.*

Les vues de l'auteur, quant à la manière de présenter ses idées, ont, à cette seconde époque, pris un autre cours. — Car une dernière rédaction, qui paraît être de 1883, est précédée de « *Considérations préliminaires* » qui débutent ainsi :

« Dans une *Publication récente*, nous avons démontré l'*erreur* de « l'*opinion* qui traite d'imaginaire la valeur des expressions ana- « lytique de coefficient $\sqrt{-1}$ et de ses fonctions de même forme. — « Nous avons eu à reconnaître, dans ce coefficient, une marque d'ac- « ception, ou manière d'emploi, dont les acceptions positive et né- « gative, indiquées par le signe $\pm$, ne sont que des cas particuliers, « et à conclure que cette observation ouvrait à toute l'analyse ma- « thématique des horizons aussi étendus que nouveaux.

« Nous avons pu nous convaincre, sur une foule d'exemples, « combien cette appréciation était fondée. Mais ces exemples ne se « sont produits qu'à mesure que se présentaient les propositions à « démontrer, et par suite sans établir un ordre assez régulier entre « eux. — C'est pour suppléer à ce grave inconvénient que nous « faisons cette *nouvelle publication*, nous proposant de réunir dans « un corps de doctrine, suffisamment indiqué du moins, les prin-

« cipaux linéaments de la nouvelle *Méthode d'Enseignement* qui « doit en résulter ».

86. — La thèse préalable est superflue.

La « *Publication récente* » n'a jamais vu le jour, pas plus que l'ouvrage intitulé « *De l'acception des quantités dans l'analyse mathématique* ». — Il en existe cependant aussi plusieurs rédactions qui ne sont guère que des variantes différant seulement par l'ordre des matières. — La plus ancienne, antérieure à 1880, a pour titre : « *Discussion de l'opinion qu'on s'est faite jusqu'ici, en analyse* « *géométrique et en algèbre, des quantités de coefficient* $\sqrt{-1}$ », et se termine par l'annonce du traité « *De l'acception* » motivée à peu près comme dans le passage des « *Considérations préliminaires* » que nous venons de citer.

C'est cette « *Discussion* » que l'auteur avait bien voulu nous communiquer en 1880 ; nous n'avons eu connaissance de ses autres manuscrits, y compris l' « *Avant-propos* », que postérieurement à son décès (août 1887). Or cette « *Discussion* » dont le but, dans la pensée de l'auteur, était surtout *critique,* contient cependant, et sauf à les coordonner comme lui-même en signale la nécessité, tous les éléments de la nouvelle théorie. — Si donc on pose les bases de cette théorie dès le début, ainsi que nous l'avons fait dans les numéros 1 à 3 du *Mémoire*, toute « *Discussion* » devient par cela même superflue.

C'est dire que le premier point de vue de M. George, en 1869, est, à notre avis, infiniment préférable à celui auquel il s'est placé dix ans plus tard.

87. — Dernière rédaction du « *Traité de l'acception* » compliquée d'une modification de l'Algorithme. — Cette modification est écartée dans le « *Mémoire* ».

Le second ouvrage intitulé « *De l'acception des quantités dans l'analyse mathématique* » a été écrit par M. George sous l'empire

d'une préoccupation exposée en ces termes dans les « *Considérations préliminaires* ».

« Dès le début, nous avons dû nous occuper de substituer des « expressions plus convenables à ces $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}}$, $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$, etc. « si encombrants et si lourds, dont le maintien ne pouvait servir « qu'à rappeler par quelles opérations nous étions parvenu à en « constater la valeur.

« Naturellement, il en résultera une modification profonde de « l'algorithme actuel ; de nouveaux signes, de nouvelles quantités, « de nouveaux noms à introduire ».

Mais ce qui en résulte aussi, c'est que la lecture de cet ouvrage est extrêmement laborieuse, parce qu'il faut commencer par se familiariser avec le nouvel algorithme, qui est loin d'être simple, et loin d'ailleurs d'être irréprochable à bien des égards. — L'auteur lui-même l'a pressenti, car il ajoute :

« Malgré le soin que nous avons apporté, soit dans le choix des « signes eux-mêmes, soit dans leur nomenclature, nous ne préten- « dons ici que donner des indications, reconnaissant que ce n'est « qu'aux maîtres qu'il appartient de déterminer, avec l'autorité qui « leur est dévolue, les améliorations à importer dans la science ».

Nous nous sommes donc rigoureusement abstenu de suivre M. George dans cette voie. — Nous avons même écarté, quoiqu'elle soit assez communément admise aujourd'hui, la substitution de la lettre i au symbole $\sqrt{-1}$, n'étant pas suffisamment édifié sur les avantages que présenterait, au point de vue de l'écriture ou de l'énoncé, l'emploi de formes telles que :

$$\left(i^{i}\right),\ \left(i^{\alpha i^{\alpha'}}\right),\ \left(i^{i\alpha'}\right)^{\alpha},\ \left(i^{a+\alpha i^{\alpha'}}\right),\ \left(x+yi+zi^{i}\right).$$

Le cadre de notre mémoire n'est guère, du reste, sauf l'ordre des matières et la manière de les exposer, que le développement des notions résumées par M. George dans l' « *Avant propos* », dont nous avons cité la majeure partie (n^{os} 75-84).

88. — Importance *secondaire* de la *Méthode* des acceptions au point de vue *pratique*.

La *Méthode* des acceptions pourra être utilisée avec avantage pour résoudre certaines questions de géométrie par application des principes de la composition des droites et de la composition des arcs à l'aide des équations analytiques (n° 62). Souvent cependant l'emploi direct des deux trigonométries sera plus expéditif.

Quant à la représentation des *lieux géométriques* au moyen de ces mêmes équations (n° 63-66), elle revient, en somme, à la substitution des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes, et la supériorité de celles-ci n'a jamais paru douteuse.

La *Méthode des acceptions*, n'a donc, au point de vue *pratique*, qu'une importance *secondaire*.

89. — Importance *capitale* de la *Théorie* des acceptions.

Mais il en est tout autrement dela *Théorie* même des acceptions, que nous résumons une dernière fois dans cette proposition unique :

« Toute quantité *réelle* peut être représentée algébriquement « par la forme A $\sqrt{-1}^{\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$ (n° 1), et réciproquement, toute fonction « de $\sqrt{-1}$ est réductible à cette forme (n^{os} 10, 71-74) : *il n'y a « donc pas de quantités imaginaires.* »

D'où résulte, comme conséquence, la rectification rationnelle d'un grand nombre d'erreurs, de contradictions ou de paradoxes analytiques que nous avons successivement signalés (n^{os} 16, 17, 21, 23, 25, 26, 28, 29, 42, 57).

Le fait d'avoir établi cette proposition constitue, à nos yeux, pour feu l'abbé George, un incontestable droit au titre d'*inventeur* dans le domaine de la scionce pure.

Nous avons expliqué dans ce dernier chapitre, comme nous l'avions annoncé dans le préambule de la préface, en quoi consistent ses travaux, — comment il se fait qu'ils sont demeurés inédits, et

pourquoi nous ne nous bornons pas aujourd'hui à les publier.

En nous efforçant de les présenter sous la forme qui nous a semblé la plus propre à les faire apprécier, nous n'avons fait qu'acquitter une dette de respectueuse reconnaissance envers le penseur remarquable qui, depuis l'époque déjà bien lointaine où nous l'avons connu (1830), n'a cessé, jusqu'à son dernier jour, de nous témoigner un affectueux et, pour ainsi dire, un paternel intérêt.

APPENDICE.

90.— Rapprochement de la théorie des acceptions avec les conceptions de MM. Gaston Tarry, Marie et Bour.

Pendant que notre Mémoire était sous presse, nous avons eu l'occasion de prendre connaissance, dans les comptes-rendus des 18e et 19e sessions (1889 et 1890) de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*, du travail de M. Gaston Tarry, contrôleur des contributions diverses à Alger, sur une nouvelle science à laquelle il donne le nom de *Géométrie générale*, et qui aurait pour objet principal l'interprétation et la représentation des résultats imaginaires en géométrie.

M. Tarry remarque (n° 118) que sa manière de construire le point défini par les solutions ($x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$), qui sont supposées satisfaire à une équation $F(x,y)=0$, au moyen de ce qu'il appelle une *composante origine* dont les coordonnées seraient ($x_1=\alpha$, $y_1=\alpha'$), et une *composante terme* dont les coordonnées seraient ($x_2=\alpha+\beta$, $y_2=\alpha'+\beta'$), concorde avec celle de M. Marie. — « Il est évident, dit M. Tarry, que notre composante terme (x_2, y_2) « est le *point représentatif* de M. Marie. »

M. Maximilien Marie (décédé en avril 1891) est, comme on sait, auteur d'un ouvrage intitulé : *Théorie des fonctions de variables imaginaires* (3 vol. in-8°, Gauthier Villars, 1874-75). Le 3e volume est l'*historique* du livre, et on y lit d'abord (page 118), ce qui montre en effet l'accord de sa conception avec celle de M. Tarry :

« Pour moi, la solution ($x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$) représente « le point ($x=\alpha+\beta$, $y=\alpha'+\beta'$). On parvient de l'origine à ce point « en décrivant la diagonale du chemin brisé dont les côtés paral-

« lèles aux axes seraient α et α', et ensuite celles du chemin brisé « dont les côtés seraient β et β'. »

Cependant M. Marie constate en même temps (*ibidem*) que son mode de construction du point correspondant à une solution imaginaire était discuté par un autre savant, M. Bour (décédé en 1861 ou 62).

« Bour me demandait comment il ne m'était pas venu à l'esprit « de construire la solution ($x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1}$) en traçant « la première diagonale *dans le plan*, puisqu'elle était *réelle*, et la « seconde *perpendiculaire au plan*, puisqu'elle était *imaginaire*. « . . . . . Je lui opposais des objections qu'il ne sera pas inutile « d'indiquer pour prévenir des tentatives qui....., je pense, de- « vraient ensuite être abandonnées comme faites en *violation de* « *règles obligatoires*. »

« La première, qui me paraît déterminante, consiste en ce que « *rien ne peut autoriser à changer l'espace dont on dispose*, à mettre « *hors du plan* ce que l'on demandait de construire *dans le plan*. »

Il nous semble que M. Marie s'est placé là à un point de vue trop restreint.

Car une équation entre deux variables $f(x,y)=0$, ne représente pas seulement une courbe située dans le plan horizontal, mais bien un cylindre dont cette courbe est la directrice, et dont les génératrices sont parallèles aux z.

Cette même courbe peut, plus généralement encore, être regardée comme l'intersection par un plan d'une infinité de surfaces dont l'équation $F(x,y,z)=0$ serait telle qu'elle se réduisit à $f(x,y)=0$ pour une valeur donnée de z. Une solution imaginaire de (f) est donc en même temps une solution imaginaire de (F).

Il n'y a donc aucune « *violation de règles obligatoires* » dans la recherche *hors du plan* de la courbe, de l'interprétation de cette solution. — C'est à dire que l'idée de M. Bour ne devait pas être écartée *à priori*, sauf, bien entendu, à examiner si sa manière de résoudre la difficulté était satisfaisante.

Nous n'avons d'ailleurs pas à insister pour établir qu'en ce

qui concerne le point défini par les équations $(x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $y=\alpha'+\beta'\sqrt{-1})$, ni le mode de construction de M. Tarry ou de M. Marie, ni celui de M. Bour ne se concilient avec la théorie des acceptions, d'après laquelle ce point serait donné par l'équation analytique :

$$(x=\alpha)+(y=\alpha'+\beta)\sqrt{-1}+(z=\beta')\sqrt{-1}\sqrt{-1}=\mathrm{R}\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'},$$

avec : $\mathrm{R}=\sqrt{\alpha^2+(\alpha'+\beta)^2+\beta'^2}$, $\mathrm{tg}\,\rho=\dfrac{\sqrt{(\alpha'+\beta)^2+\beta'^2}}{\alpha}$, $\mathrm{tg}\,\rho'=\dfrac{\beta'}{\alpha'+\beta}$.

Dans les n^{os} **121** et suivants, M. Tarry traite de la ligne droite en partant de l'équation générale du premier degré qu'il suppose présentée sous cette forme :

$$(a+a'\sqrt{-1})x+(b+b'\sqrt{-1})y+(c+c'\sqrt{-1})=0.$$

Sans le suivre dans ses développements, nous nous bornerons à faire remarquer qu'une fois admise la notion de l'acception, d'après laquelle toutes les quantités sont *réelles*, nous ne voyons pas comment pourraient prendre naissance, dans le calcul, des équations *ordinaires* à coefficients imaginaires. — Les symboles imaginaires ne peuvent apparaître dans de telles équations que comme conséquence de certaines valeurs attribuées aux données ou aux variables, et nous avons indiqué comment les interpréter.

Nous avons, dans la préface, rapproché le *caractère* de la méthode des acceptions de celui des méthodes des équipollences et des quaternions.

Nous croyons pouvoir dire des méthodes de MM. G. Tarry et Marie que ce sont des *conceptions individuelles*, autorisé que nous sommes, à cet égard, par les termes mêmes d'un rapport de MM. Puissan et Faye sur deux mémoires de M. Marie, et cité par lui à la page 251 de son troisième volume :

« La méthode que M. Marie propose de suivre et qu'il a effecti-

« vement appliquée à plusieurs exemples, *repose sur un mode de* « *représentation des imaginaires* QUI LUI EST PROPRE... »

La théorie des acceptions est au contraire une *conception rationnelle*, puisqu'elle *repose* sur une *proposition d'algèbre* formulée dès le début du *Mémoire*, et que nous rappelons :

« *Les coëfficients* $[+1=(-1)^0]$ et $[-1=(-1)^1]$, *qui caractérisent* « *les quantités positives et négatives, sont les valeurs particulières* « *correspondant à* $\varphi=0$ et $\varphi=1$, *d'une même exponentielle* $(-1)^\varphi$. »

Les conséquences déduites de cette proposition par l'auteur de la théorie des acceptions, et par nous-même après lui, sont-elles convenablement justifiées ? C'est la question qui demeure naturellement soumise à l'appréciation du lecteur.

ERRATA

Page XIV, ligne 2, *au lieu de* : 64, *lisez* : 71.

Page 13, ligne 3 en remontant, *au lieu de* : $\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)n1$, *lisez* : $\left(\sqrt{-1}^{\frac{4}{n}}\right)^{n-1}$

Page 17 (titre courant), *au lieu de* : COMPOSITION DES DROITES, *lisez* : ET EXPRESSION ANALYTIQUE DES QUANTITÉS.

Page 26, ligne 6, *au lieu de* : là, *lisez* : ce qui vient d'être expliqué (n° 9).

Page 31, ligne 18, *au lieu de* : $\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}$, *lisez* : $\sqrt{-1}^{\rho}\sqrt{-1}^{\rho'}$.

Page 36, ligne 1, *au lieu de* : $\sqrt{-1}\sqrt{-1}$, *lisez* : $\sqrt{-1}\sqrt{-1}\Sigma z$.

Page 39, ligne 6, *au lieu de* : $\left(\alpha\sqrt{1-}^{\alpha'}\right)$, *lisez* : $\left(\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}\right)$.

Page 40, ligne 6 en remontant, *au lieu de* : cos et cos, *lisez* : cot et cot.

Page 46, ligne 11, *au lieu de* : $\left(\sqrt{-1}\alpha\ldots\right.$, *lisez* : $\left(\sqrt{-1}^{\alpha}\ldots\right.$

— ligne 5 en remontant, *au lieu de* : $\sqrt{-1}$, *lisez* : $\sqrt{-1}^{\alpha}$.

Page 71, ligne 10, *au lieu de* : $x+y\sqrt{-1}$, *lisez* : $x\pm y\sqrt{-1}$.

Page 72, ligne 1, *au lieu de* : $\sqrt{-1}^{\mp x}$, *lisez* : $\sqrt{-1}^{\pm x}$.

Page 80, ligne 1 en remontant, *au lieu de* : $\sqrt{-1}$, *lisez* : $\sqrt{-1}^{a}$.

Page 86, ligne 6 en remontant, *au lieu de* : $\sin a'$, *lisez* : $\sin\alpha'$.

Page 105, ligne 5 en remontant, *au lieu de* : $\frac{\alpha+(\beta\pm 1)\sqrt{-1}}{(1+\beta)\mp\alpha\sqrt{-1}}$, *lisez* : $\frac{\alpha+(\beta\pm 1)\sqrt{-1}}{(1\pm\beta)\mp\alpha\sqrt{-1}}$.

Page 108, ligne 2, *au lieu de* : $\frac{1+mt}{1-mt}$, *lisez* : $\frac{1+mt}{1-mt^2}$.

Page 116, ligne 3, *au lieu de* : $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{2}+4k}\ \sqrt{\sqrt{-1}^{2}\times\sqrt{-1}^{4k}}$, *lisez* : $\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{2}+4k}=\sqrt[m]{\sqrt{-1}^{2}\times\sqrt{-1}^{4k}}$.

Page 121, ligne 5 en remontant, *au lieu de* : $N_{\mu}-1$, *lisez* : $N_{\mu}-1$.

Page 122, ligne 15, *au lieu de* : les valeurs 2, 3... μ, *lisez* : les valeurs 1, 2, 3... μ.

— ligne 6 en remontant, *au lieu de* : $\beta'=\sqrt[p]{\beta'}$, $\beta''=\sqrt{\beta'}\ldots$, *lisez* : $\beta'=\sqrt[p]{\beta}$, $\beta''=\sqrt[p]{\beta'}\ldots$

— ligne 3 en remontant, *au lieu de* : x^{9}, *lisez* : x^{p}.

— ligne 1 en remontant, *au lieu de* : x^{3^2}, *lisez* : x^{3^2}.

Page 125, ligne 10 en remontant, *après* 49, *ajouter le titre omis* : **Décomposition en facteurs d'une racine de rang quelconque.**

Page 128, ligne 1 en remontant, *au lieu de* : $n_1 p_\mu - 1$, *lisez* : $n_1 p^\mu - 1$.

Page 138, ligne 3, *au lieu de* : LM = LM′, *lisez* : LM = L′M′.

Page 148, ligne 7 en remontant, *au lieu de* : $\frac{X''^2}{B''^2}$, *lisez* : $\frac{X''^2}{A''^2}$.

Page 150, ligne 16, *au lieu de* : a, *lisez* : α.

Page 151, ligne 6, *au lieu de* : $x = \frac{p^2}{2\alpha^2}$, *lisez* : $x = \frac{p}{2\alpha^2}$.

Page 153, lignes 3 et 4, *au lieu de* : $x > a'$ ou $-x < -a'$, *lisez* : $x < a'$ ou $-x > -a'$.

Page 160, ligne 13, *au lieu de* : En, *lisez* : en.

Page 165, ligne 9 en remontant, *au lieu de* : $R\sqrt{-1}\ \sin\alpha \sin\alpha'$, *lisez* : $R\sqrt{-1}^{\sqrt{-1}} \sin\alpha \sin\alpha'$.

Page 166, ligne 3, *après* : ... $\cos\theta_j^2$, *ajouter le signe* + .

— — *au lieu de* : z', *lisez* : z'^2.

Page 178, figure 54, *au lieu de* : y, y′, *lisez* : Y, Y′ .

Page 191, figure 57, *sur la droite* C′E, *au lieu de* : C‴, *lisez* : C″ .

Page 198, figure 61, *au lieu de* : $r_1 = \sin\alpha$, *lisez* : $r_1 = r \sin\alpha$.

Page 199, tableau *a* — col. *arcs*, ligne 3, *au lieu de* : α' , *lisez* : α''.

— — — col. x, ligne 1 en remontant, *au lieu de* : $= r_{3n+1}$, *lisez* : $+ r_{3n+1}$.

tableau *b*, — col. y, ligne 4 en remontant, *au lieu de* : y_{3n+1} , *lisez* : y_{3n-1}.

— — — — *au lieu de* : r_{3n+2}, *lisez* : r_{3n-2}.

Col. z, ligne 4 en remontant, *au lieu de* : $r_2 \cos\alpha'''$, *lisez* : $r_2 \cos\alpha''$.

— ligne 4 en remontant, *au lieu de* : $r_3 \cos\alpha^{\text{v}}$, *lisez* : $r_3 \cos\alpha^{\text{v}}$.

— ligne 2 en remontant, *au lieu de* : r_{3n-2}, *lisez* : r_{3n+2}.

Page 203, ligne 1 en remontant, *au lieu de* : $\sqrt{-1}^{\alpha'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha''}}$, *lisez* : $\sqrt{-1}^{\alpha'\alpha\sqrt{-1}^{\alpha'}}$.

TABLE DES MATIÈRES

Pages

PRÉFACE..... I—XXII

CHAPITRE I (Nos 1 à 5).

Représentation linéaire des quantités et expression analytique de cette représentation composée d'un double élément: 1° le *Module*; 2° l'*Acception*. — Conséquences..... 1

CHAPITRE II (Nos 6 à 14).

Calcul des expressions analytiques des quantités considérées comme éléments de *sommes*. — Composition des droites..... 18

CHAPITRE III (Nos 15 à 29).

Etude des angles ou arcs *dits* imaginaires. — Conséquences..... 38

CHAPITRE IV (Nos 30 à 44).

Calcul des expressions analytiques des quantités considérées comme éléments de *produits*. — Composition des arcs. — Conclusion des quatre premiers chapitres..... 76

CHAPITRE V (Nos 45 à 51).

Applications algébriques de la théorie des acceptions..... 113

CHAPITRE VI (Nos 52 à 61).

Interprétation et représentation des fonctions de symboles imaginaires en géométrie analytique..... 137

CHAPITRE VII (Nos 62 à 74).

Mise en équation et résolution des questions de géométrie par la méthode des acceptions..... 169

CHAPITRE VIII (Nos 75 à 89).

Travaux de feu l'abbé George..... 213

APPENDICE (No 90)

Rapprochement de la théorie des acceptions avec les conceptions de MM. Gaston Tarry, Marie et Bour..... 229

Laval. — Imprimerie et stéréotypie E. Jamin, 41, rue de la Paix.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
512.32EV7M C001
MEMOIRE SUR L'INTERPRETATION DES SYMBOLE
3 0112 017046043